BARAJ DE JUNIORI ,,Euclid"
Cipru, 11 mai 2013 (barajul 4)

Problema 1. Găsiţi toate valorile numărului natural n pentru care numerele 5^n+1 şi 39 sunt prime între ele.

Problema 2. Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive care verifică $xy + yz + zx = xyz$, demonstraţi că
$$\frac{x-1}{x^3} + \frac{y-1}{y^3} + \frac{z-1}{z^3} \geq \frac{6}{xyz}.$$

Problema 3. Se consideră un pătrat $ABCD$. Pe laturile (AD) şi (AB) se iau punctele K, respectiv L astfel încât $DK = AL$. Fie E şi F mijloacele segmentelor $[KL]$ şi $[CL]$. Dacă dreapta EF intersectează dreptele AD şi AB în punctele H, respectiv X, demonstraţi că:
a) dreapta HL este perpendiculară pe dreapta DX;
b) dacă paralela din L la AD intersectează cercul circumscris triunghiului DXL în punctul S, atunci patrulaterul $DSLH$ este paralelogram.

Problema 4. Fiind date două mulţimi finite, A şi B, de numere reale, notăm $A + B = \{a + b \mid a \in A,\, b \in B\}$. Aflaţi:
a) numărul maxim n pentru care există $A, B \subset \mathbb{N}$, A şi B având câte n elemente, astfel încât $A + B = \{0, 1, 2, \ldots, 2012\}$;
b) numărul minim m pentru care există $A, B \subset \mathbb{N}$, A şi B având câte m elemente, astfel încât $A + B = \{0, 1, 2, \ldots, 2012\}$.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Găsiţi toate valorile numărului natural n pentru care numerele 5^n+1 şi 39 sunt prime între ele.

Soluţie: Avem $39 = 3 \cdot 13$. Pentru ca numerele $5^n + 1$ şi 39 să nu aibă niciun divizor comun mai mare ca 1 este necesar şi suficient ca $5^n + 1$ să nu fie divizibil nici cu 3, nici cu 13. Trebuie deci să găsim exponenţii n pentru care $3 \nmid 5^n + 1$ şi $13 \nmid 5^n + 1$.
Dacă $n = 0$, atunci $5^n+1 = 2 \neq M_3, \neq M_{13}$, deci $\boxed{n = 0}$ este o soluţie acceptabilă.
Dacă $n = 1$, atunci $5^n + 1 = 6 = M_3$.
Dacă $n = 2$, atunci $5^n + 1 = 26 = M_{13}$.
Dacă $n = 3$, atunci $5^n + 1 = 126 = M_3$.
Dacă $n = 4$, atunci $5^n + 1 = 626 \neq M_3, \neq M_{13}$.
Aşadar cel mai mic număr natural nenul care îndeplineşte condiţiile $3 \nmid 5^n + 1$ şi $13 \nmid 5^n$ este $n = 4$.
Avem următoarele cazuri:
• $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$5^n + 1 = 5^{4k} + 1 = (5^2)^{2k} + 1 = 25^{2k} + 1 = (24 + 1)^{2k} + 1 = M_3 + 2 \neq M_3$$

şi

$$5^n + 1 = 5^{4k} + 1 = (5^2)^{2k} + 1 = 25^{2k} + 1 = (26 - 1)^{2k} + 1 = M_{13} + 2 \neq M_{13}.$$

• $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$. Avem $5^n + 1 = 5^{4k+1} + 1 = 5 \cdot (5^2)^{2k} + 1 = 5 \cdot 25^{2k} + 1 = 5 \cdot (24 + 1)^{2k} + 1 = 5(M_3 + 1) + 1 = M_3 + 6 = M_3$.
• $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}^*$. Avem $5^n + 1 = 5^{4k+2} + 1 = 5^2 \cdot (5^2)^{2k} + 1 = 25 \cdot 25^{2k} + 1 = 25 \cdot (26 - 1)^{2k} + 1 = 25(M_{13} + 1) + 1 = M_{13} + 26 = M_{13}$.
• $n = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}^*$. Avem $5^n + 1 = 5^{4k+3} + 1 = 5^3 \cdot (5^2)^{2k} + 1 = 125 \cdot 25^{2k} + 1 = 125 \cdot (24 + 1)^{2k} + 1 = 125(M_3 + 1) + 1 = M_3 + 126 = M_3$.
În concluzie, numerele naturale care au proprietatea din enunţ sunt $n = 0$ şi $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$, adică numerele $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$.

Problema 2. Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive care verifică $xy + yz + zx = xyz$, demonstraţi că

$$\frac{x-1}{x^3} + \frac{y-1}{y^3} + \frac{z-1}{z^3} \geq \frac{6}{xyz}.$$

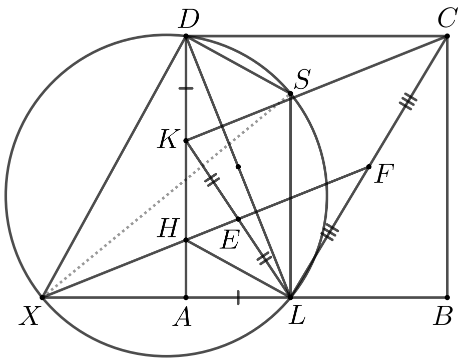
Soluţie: Notăm $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ şi atunci avem $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{abc}$, adică $a + b + c = 1 \quad (1)$ şi inegalitatea revine la $\frac{\frac{1}{a}-1}{\frac{1}{a^3}} + \frac{\frac{1}{b}-1}{\frac{1}{b^3}} + \frac{\frac{1}{c}-1}{\frac{1}{c^3}} \geq \frac{6}{\frac{1}{abc}} \Leftrightarrow$
$a^2(1-a) + b^2(1-b) + c^2(1-c) \geq 6abc \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - a^3 - b^3 - c^3 \geq 6abc \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-a^3-b^3-c^3 \geq 6abc \Leftrightarrow ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2 \geq 6abc$. Această inegalitate rezultă din inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică: $ab^2+ac^2 \geq 2abc$, $ba^2+bc^2 \geq 2abc$, $ca^2+cb^2 \geq 2abc$.

Problema 3. Se consideră un pătrat $ABCD$. Pe laturile (AD) şi (AB) se iau punctele K, respectiv L astfel încât $DK = AL$. Fie E şi F mijloacele segmentelor $[KL]$ şi $[CL]$. Dacă dreapta EF intersectează dreptele AD şi AB în punctele H, respectiv X, demonstraţi că:
a) dreapta HL este perpendiculară pe dreapta DX;
b) dacă paralela din L la AD intersecteză cercul circumscris triunghiului DXL în punctul S, atunci patrulaterul $DSLH$ este paralelogram.

Soluţie: Triunghiurile dreptunghice CDK şi DAL sunt congruente, deci $\sphericalangle DCK \equiv \sphericalangle ADL$ şi deoarece sunt ascuţite şi au o pereche de laturi perpendiculare ($CD \perp AD$), ele vor avea încă o pereche de laturi perpendiculare, $CK \perp DL$. În triunghiul CKL avem $EF \parallel CK$ (linie mijlocie). Rezultă că $EF \perp DL$. Dar şi $DA \perp XL$, deci H este ortocentrul triunghiului DXL. Atunci HL este perpendiculară pe DX.

b) Deoarece $[XS]$ este diametru în acest cerc, avem $m(\sphericalangle XLS) = 90°$. Rezultă că $m(\sphericalangle XDS) = 90°$, adică $XD \perp DS$, prin urmare $DS \parallel HL$ şi, cum $LS \parallel HD$, rezultă că $DHLS$ este paralelogram.



Problema 4. Fiind date două mulţimi finite, A şi B, de numere reale, notăm $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$. Aflaţi:
a) numărul maxim n pentru care există $A, B \subset \mathbb{N}$, A şi B având câte n elemente, astfel încât $A+B = \{0, 1, 2, \ldots, 2012\}$;
b) numărul minim m pentru care există $A, B \subset \mathbb{N}$, A şi B având câte m elemente, astfel încât $A+B = \{0, 1, 2, \ldots, 2012\}$.

Soluţie: Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ cu $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ şi $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ cu $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$.

a) Numerele $a_1 + b_1$, $a_2 + b_1$, ... , $a_k + b_1$, $a_k + b_2$, ... , $a_k + b_k$ sunt $2k - 1$ elemente ale mulţimii $A + B$, cu $a_1 + b_1 < a_2 + b_1 < \ldots < a_k + b_1 < a_k + b_2 < \ldots < a_k + b_k$. Deoarece avem nevoie de cea mai mare valoare a lui k pentru care $A + B$ are 2013 elemente, va trebui ca $2k - 1 \leq 2013$, de unde $k \leq 1007$. Aşadar, $n = k_{max} = 1007$. Această valoare chiar se atinge dacă $A = B = \{0, 1, 2, \ldots, 1006\}$.

b) Deoarece numărul perechilor $(a, b) \in A \times B$ este k^2, mulţimea $A + B$ are cel mult k^2 elemente. Pentru ca $A + B$ să aibă 2013 elemente, este necesar ca $2013 \leq k^2$, adică $k \geq 45$, deci $m = k_{min} = 45$. Această valoare chiar se atinge, de pildă pentru $A = \{0, 1, 2, \ldots, 44\}$ şi $B = \{45x \mid x = 0, 1, 2, \ldots, 43\} \cup \{1968\}$.