Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 21 august 2019

Clasa a VIII-a

Problema 1. Mihai a ales un număr natural nenul n şi a observat că numerele 4^n şi 5^n au aceeaşi primă cifră în scrierea lor în baza 10. Arătaţi că respectiva cifră poate fi numai 2 sau 4.

Olimpiadă Germania

Soluţie:
Dacă 4^n şi 5^n au prima cifră c, atunci există k şi ℓ astfel încât $c \cdot 10^k < 4^n < (c+1) \cdot 10^k$ şi $c \cdot 10^\ell < 5^n < (c+1) \cdot 10^\ell$. (Inegalităţile sunt stricte deoarece 4^n şi 5^n nu sunt divizibile cu 10.) **2p**
Combinând aceste două relaţii obţinem $c^3 \cdot 10^{k+2\ell} < 4^n \cdot (5^n)^2 < (c+1)^3 \cdot 10^{k+2\ell}$, deci $c^3 < 10^{2n-k-2\ell} < (c+1)^3$. **3p**
Singurele perechi de cifre consecutive $(c,\, c+1)$ care au proprietatea că intervalul cuprins între cuburile lor conţine o putere a lui 10 sunt $(2,3)$ şi $(4,5)$: $2^3 < 10 < 3^3$ şi $4^3 < 100 < 5^3$. Aşadar, c poate fi numai 2 sau 4. .... **2p**

Remarcă: Se poate demonstra că prima cifră, c, chiar poate fi şi 2 şi 4: 4^{11} şi 5^{11} încep, ambele, cu 4, iar 4^{52} şi 5^{52} încep ambele cu 2.

Problema 2. a) Spunem că un număr natural este *aproape pătrat* dacă el este produsul a două numere naturale consecutive (adică „*aproape* egale”).
Arătaţi că orice *aproape pătrat* poate fi scris ca raportul dintre două *aproape pătrate.*

ViitoriOlimpici.ro

b) Fie n un număr întreg fixat. Spunem despre un număr întreg N că este „n-bun” dacă el se scrie ca $N = m^2 + m - n$, cu m întreg. Arătaţi că orice număr n-bun se scrie ca raportul a două numere n-bune.

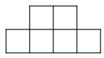
Andrei Eckstein

Soluţie:
a) Observăm că produsul a două numere *aproape pătrate* consecutive, $m(m-1)$ şi $(m+1)m$, este $m(m-1)(m+1)m = (m^2-1)n^2$, adică un număr care este tot un *aproape pătrat.*

Putem atunci scrie $(m-1)m = \dfrac{(m^2-1)m^2}{m(m+1)}$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$. Cum orice număr aproape pătrat se scrie sub forma $(m-1)m$, el se scrie ca raportul dintre două numere *aproape pătrate.* **3p**

b) Dacă $n \neq m^2 - m$, putem scrie $m^2 + m - n = \dfrac{(m^2 - n - 1)^2 + (m^2 - n - 1) - n}{(m-1)^2 + (m-1) - n}$
(numitorul nu se anulează deoarece $n \neq m(m-1)$.) **3p**
Dacă $n = m^2 - m$, atunci $m^2 + m - n = 2m = \dfrac{(3m)^2 + (3m) - (m^2 - m)}{(m+1)^2 + (m+1) - (m^2 - m)}$
(care rezultă folosind relaţia de mai sus scrisă pentru $m + 1$ în loc de m şi schimbând mezii între ei). **1p**

Problema 3. Ana şi Bogdan joacă „Battleship" pe o tablă $m \times n$, $m, n \geq 4$, împărţită în pătrăţele unitate. Ana plasează pe tablă, ascunsă de privirile lui Bogdan, o navă care constă din 6 pătrăţele unitate şi care are forma de mai jos



Nava poate fi rotită şi plasată pe tablă în orice poziţie, cu condiţia ca fiecare din pătrăţelele ei să se suprapună peste câte unul din pătrăţelele tablei. O dată plasată pe tablă, nava nu mai este mişcată. Liniile tablei se numerotează de la 1 la m, iar coloanele de la 1 la n. Bogdan alege un pătrăţel al tablei şi îi comunică Anei numărul liniei şi coloanei pe care se află respectivul pătrăţel. Dacă pătrăţelul vizat de Bogdan este unul din cele şase pe care se află nava, se consideră că Bogdan a scufundat nava. Dacă nu, Bogdan poate face noi încercări, până când reuşeşte să scufunde nava. La fiecare încercare, el alege un nou pătrăţel şi trimite acolo o bombă. Care este numărul minim de încercări care îi sunt necesare lui Bogdan pentru a fi sigur că va scufunda nava indiferent în ce poziţie ar fi plasată aceasta, dacă:
a) $m = 6$, $n = 4$;
b) $m = 6$, $n = 8$?

Dănuţ Aramă

Soluţie:
a) Deoarece tabla poate fi acoperită cu dale de forma unei nave (vezi figura 1), iar nava poate sta în oricare din cele patru poziţii, Bogdan are nevoie de cel puţin 4 încercări pentru a fi sigur că scufundă nava. **1p**
Pe de altă parte, dacă Bogdan alege cele patru pătrăţele colorate cu negru (vezi figura 2) pentru a le bombarda, cum în zona rămasă albă nu mai încape nicio navă, Bogdan poate fi sigur că, oricum ar fi fost plasată iniţial nava, (una dintre) cele 4 bombe trimise de el a scufundat nava. **1p**
În concluzie, 4 încercări îi sunt necesare şi îi sunt şi suficiente lui Bogdan pentru a fi sigur că scufundă nava.

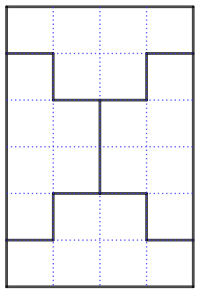


figura 1

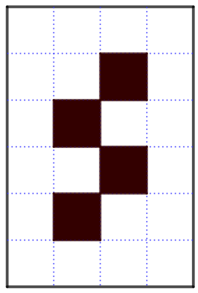
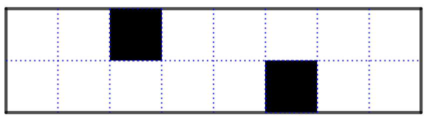
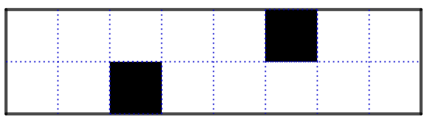


figura 2

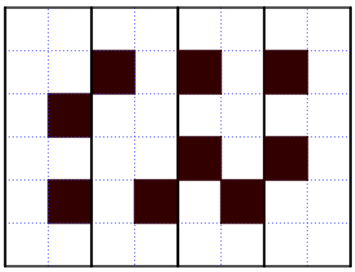
b) Vom arăta că numărul minim de încercări care îi garantează lui Bogdan scufundarea navei este 9.
Tabla poate fi împărţită în două jumătăţi 6×4 şi fiecare jumătate poate fi pavată cu câte 4 dale de forma unei nave, deci tabla întreagă poate fi pavată cu 8 asemenea dale. Astfel, Bogdan are nevoie de minim 8 încercări. Vom arăta în cele ce urmează că 8 încercări nu sunt întotdeauna suficiente.
Este uşor de văzut că dacă există un dreptunghi 6×2 în care Bogdan a tras o singură dată, atunci în respectivul dreptunghi mai este întotdeauna loc pentru o navă. Aşadar, Bogdan trebuie să tragă de minim două ori în fiecare dreptunghi 6×2. .... **1p**
Împărţim tabla în trei dreptunghiuri 2×8 şi ne uităm la numărul de încercări efectuate de Bogdan în fiecare din aceste dreptunghiuri. În fiecare din ele, Bogdan trebuie să facă minim două încercări. Atunci 8 încercări în total pot proveni din $2+3+3$ sau din $2+2+4$. Oricum, va exista un dreptunghi 2×8 în care Bogdan a efectuat exact două încercări. Ne uităm la un asemenea dreptunghi. Pentru a nu încăpea o navă nici pe primele 4 coloane, nici pe ultimele 4, trebuie ca Bogdan să vizeze un pătrăţel de pe coloanele 2 sau 3 şi unul de pe coloanele 6 sau 7. Pentru a nu putea plasa o navă pe coloanele 3-6, este obligatoriu ca Bogdan să vizeze fie pătrăţelele de pe linia 1 coloana 3 şi linia 2 coloana 6, fie, invers, cele de pe linia 1 coloana 6 şi linia 2 coloana 3, ca în figurile de mai jos. **1p**





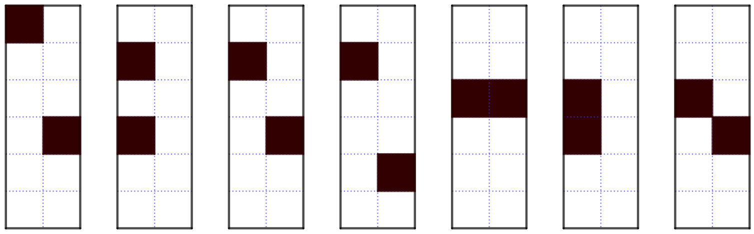
Datorită simetriei, putem presupune că există un dreptunghi precum cel din figura de deasupra. Ne uităm la dreptunghiul 8×2 de deasupra acestuia (dacă nu există, rotim figura). Arătăm că acesta trebuie să conţină cel puţin 4 pătrăţele negre (adică, pentru a nu se putea ascunde o navă pe bucata albă rămasă din dreptunghiul 4×8, Bogdan trebuie să facă minim 4 încercări în dreptunghiul de deasupra). Putem ascunde nave plasate pe verticală pe coloanele 1-2, pe coloanele 4-5 şi pe coloanele 7-8, deci Bogdan va trebui să efectueze câte o încercare în fiecare din aceste zone, neapărat pe linia a doua. Dacă, de exemplu, el alege coloana 4, atunci încape o navă cu 4 pătrăţele pe linia 1 (coloanele 4,5,6,7) şi două pătrăţele pe linia 2 (coloanele 5 şi 6). Oricum ar fi, în dreptunghiul de deasupra, Bogdan va trebui să facă minim 4 încercări. **1p**

Aşadar, singura variantă în care Bogdan ar putea face numai 8 încercări ar fi ca el să facă 4 încercări în dreptunghiul 2×8 din mijloc şi câte două în cel de deasupra şi de dedesubt. Ştim că în dreptunghiurile de deasupra şi dedesubt Bogdan trebuie să facă încercările în coloanele 3 şi 6. Ne uităm acum la dreptunghiul 6×2 format din primele două coloane. Ştim că Bogdan trebuie să efectueze minim două încercări în acest dreptunghi. La fel în dreptunghiule format din coloanele din mijloc şi în dreptunghiul format din ultimele două coloane. Asta face mai mult decât cele 4 încercări pe care am presupus că le-ar face Bogdan. **1p**
În concluzie, nu este posibil ca Bogdan să efectueze numai 8 încercări. Are nevoie de minim 9.
Pe de altă parte, 9 încercări îi sunt suficiente, după cum se poate vedea din figura de mai jos: **1p**

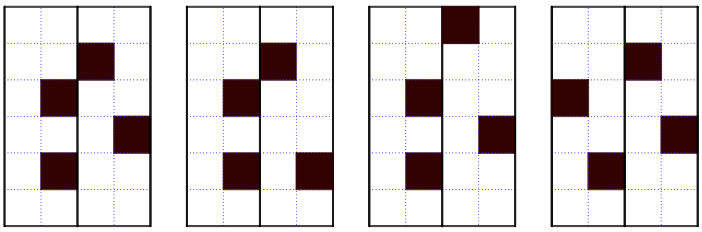


Altă soluţie pentru b) Vom arăta că numărul minim de încercări care îi garantează lui Bogdan scufundarea navei este 9.
Tabla poate fi împărţită în două jumătăţi 6×4 şi fiecare jumătate poate fi pavată cu câte 4 dale de forma unei nave, deci tabla întreagă poate fi pavată cu 8 asemenea dale. Astfel, Bogdan are nevoie de minim 8 încercări. Vom arăta în cele ce urmează că 8 încercări nu sunt întotdeauna suficiente. Împărţim tabla în 4 dreptunghiuri 6×2. Dacă există vreo asemenea porţiune în care Bogdan trage o singură dată, atunci el nu are garanţia de a scufunda o navă plasată integral în respectiva zonă (rotită cu $90°$ faţă de cea din enunţ, într-un sens sau altul): oricum am colora cu negrul unul din pătrăţelele dreptunghiului 6×2, în zona rămasă albă se poate plasa

o navă. Aşadar, dacă 8 încercări i-ar putea fi suficiente lui Bogdan, el ar trebui să efectueze câte două încercări asupra fiecăruia din cele 4 dreptunghiuri 6×2. Singurele moduri în care Bogdan poate colora două dintre pătrăţelele unei table 6×2 cu negru astfel încât în zona rămasă albă a acestuia să nu mai încapă nicio navă sunt cele de mai jos (plus cele obţinute din acestea prin simetrii şi rotaţii):



Să vedem cum putem combina două asemenea dreptunghiuri ca să obţinem o tablă 6×4, în a cărei zonă albă să nu putem plasa nicio navă. Ştim că cele 4 pătrăţele negre trebuie să scufunde cele 4 nave din figura 1. Nu putem aşadar folosi niciuna din ultimele trei variante (pentru că cele două pătrăţele negre corespund unei aceleaşi nave, deci o navă va rămâne fără pătrăţel negru.) Din acelaşi motiv, putem folosi variantele 2 şi 3 (în poziţia asta) numai pentru dreptunghiul din dreapta. Analizând variantele (practic exemplele bune pentru Bogdan la **a)**), obţinem următoarele posibilităţi (pe lângă cea din figura 2):



Încercăm să „lipim" două asemenea figuri (nu neapărat diferite), la nevoie, după ce le-am rotit sau simetrizat în prealabil.
Vrem să arătăm că oricum am lipi două asemenea dreptunghiri, pe zona albă a dreptunghiului 6×8 rezultat se poate întotdeauna plasa o navă.
Să observăm că lângă o coloană albă trebuie să vină una cu două pătrăţele negre pe ea, dar nu dispunem pe niciuna din coloanele de margine de două pătrăţele negre. Aşadar variantele cu coloană albă pot fi folosite numai la margine. De asemenea, pentru exemplul din figura 2, precum şi exemplele 1 şi 4 de mai sus, este valabilă următoarea observaţie: dacă dreptunghiul care vine lipit de ele nu are un pătrat negru chiar în colţ, atunci cinci dintre pătratele albe ale sale şi pătratul alb al dreptunghiului vecin vor permite plasarea unei nave. Cum nu avem pătrat negru în niciun colţ, ne rămâne numai posibilitatea de a folosi dreptunghiul din figura 2 pentru ambele jumătăţi (cu latura albă la cele două margini). Dar atunci e loc pentru o navă chiar în mijloc (pe liniile centrale). Aşadar, cu 8 încercări, Bogdan

nu poate fi sigur că scufundă nava.
Exemplul de mai jos arată că 9 încercări sunt suficiente.