Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 21 august 2019

Clasa a VII-a

Problema 1. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Avem n cartonaşe pe care sunt scrise numerele de la 1 la n şi n urne, şi ele numerotate de la 1 la n. În fiecare urnă se introduce câte unul din cartonaşe, apoi, pentru fiecare urnă, se face suma dintre numărul urnei şi cel scris pe cartonaşul aflat în urnă.
a) Arătaţi că dacă n este număr par, printre cele n sume calculate, vor exista două care dau acelaşi rest la împărţirea cu n.
b) Arătaţi că oricare ar fi $n > 2$ un număr natural impar, distribuirea cartonaşelor în urne se poate face în aşa fel încât cele n sume să dea resturi diferite la împărţirea cu n.

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie:
a) Presupunem contrariul, anume că există un mod de a introduce cartonaşele în urne fără ca două dintre cele n sume să dea acelaşi rest la împărţirea cu n. Asta înseamnă că cele n sume dau resturile $0, 1, 2, \ldots, n-2$ şi $n-1$ la împărţirea cu n, deci suma celor n sume dă acelaşi rest ca şi $0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ la împărţirea cu n. Dacă $n = 2k$, această sumă este $k(2k-1) = 2k(k-1) + k$ şi dă restul $k = \dfrac{n}{2}$ la împărţirea cu n.
Pe de altă parte, suma celor n sume este de fapt $(1 + 2 + \ldots + n) + (1 + 2 + \ldots + n) = n(n+1)$ care este divizibilă cu n, prin urmare, presupunând concluzia falsă şi calculând în două moduri o anumită cantitate am obţinut rezultate diferite, contradicţie care arată că presupunerea făcută este falsă. **4p**

b) Putem introduce cartonaşele în urne în felul următor: cartonaşul cu numărul m merge în urna cu numărul m. Astfel, cele n sume vor fi 2, 4, 6, ... , $2n$. Aceste numere dau resturi diferite la împărţirea cu n deoarece, dacă $n \mid 2i - 2j$ cu $1 \leq j < i \leq n$, atunci $(n, 2) = 1$ implică $n \mid i - j$, ceea ce nu se poate deoarece $0 < i - j < n$. **3p**

Problema 2. Numim o mulţime M de numere naturale „bună” dacă, pentru orice $x \in M$, cel puţin unul dintre numerele $x + 1$ şi $\sqrt{x}$ se află în M.
a) Determinaţi toate mulţimile bune de 4 elemente.
b) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există o mulţime bună cu n elemente.

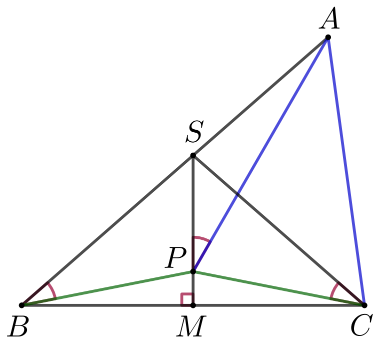
Lucian Dragomir şi Andrei Eckstein

Soluţie: a) Fie m cel mai mic element al lui M diferit de 0 şi 1. Cum $1 < \sqrt{m} < m$, rezultă că $\sqrt{m} \notin M$, deci $m+1 \in M$. Continuând analog, constatăm că $\{m, m+1, \ldots, m^2\} \subset M$. Putem avea cel mult patru numere consecutive în M, deci $m^2 - m \leq 3$. Deducem că $m = 2$, deci obligatoriu $\{2, 3, 4\} \subset M$. Cel de-al patrulea element, x, poate fi 0, 1 sau să satisfacă $\sqrt{x} \in M$, adică x mai poate fi 9 sau 16. Toate aceste patru variante convin. Aşadar sunt patru mulţimi bune cu 4 elemente: $\{0, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4, 9\}$ şi $\{2, 3, 4, 16\}$. **4p**

b) Pentru $n = 1$, $\{0\}$ şi $\{1\}$ sunt mulţimi bune.
Pentru $n = 2$, mulţimea $\{0, 1\}$ este bună.
Pentru $n = 3$, $\{2, 3, 4\}$ este o mulţime bună.
Pentru $n \geq 4$, putem lua $\{2, 3, 4, 4^2, 4^{2^2}, \ldots, 4^{2^{n-3}}\}$. **3p**

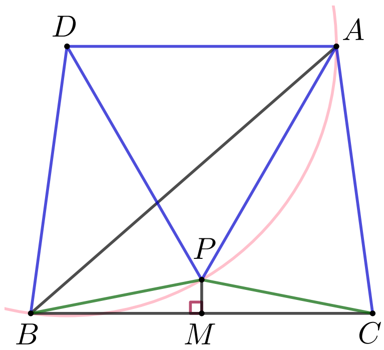
Problema 3. În triunghiul ABC, $m(\angle C) = 2 \cdot m(\angle B)$. Punctul P este un punct în interiorul triunghiului ABC care are proprietatea că $AP = AC$ şi $PB = PC$. Demonstraţi că $m(\angle PAC) = 2 \cdot m(\angle BAP)$.

baraj Hong Kong, 1994



Soluţia 1: (prelucrare AoPS)
Fie $x = m(\angle ABC)$. Atunci $m(\angle ACB) = 2x$. Fie $S \in AB$ piciorul bisectoarei unghiului $\angle C$. **1p**
Triunghiul BSC este isoscel, deci SP este mediatoarea lui $[BC]$. Fie M mijlocul lui $[BC]$. Din $m(\angle ACS) = m(\angle ABC) = x$ rezultă că triunghiurile ACS şi ABC sunt asemenea (UU), de unde $AC^2 = AS \cdot AB$, deci $AP^2 = AS \cdot AB$. **1p**
Deducem că şi triunghiurile APS şi ABP sunt asemenea (LUL), deci $m(\angle APS) = m(\angle ABP) = m(\angle SCP) \overset{\text{not}}{=} y$. **3p**
De aici un calcul de unghiuri ne conduce la concluzie: avem succesiv $m(\angle PCM) = x - y$, $m(\angle APC) = m(\angle ACP) = x + y$, $m(\angle MPC) = 90 + y - x$ şi din $m(\angle MPC) + m(\angle APC) + m(\angle SPA) = 180°$ deducem că $y = 30°$. Atunci din

triunghiul ABC, $(\angle BAC) = 180° - 3x$, iar din triunghiul APC, $m(\angle PAC) = 120° - 2x = \frac{2}{3}\, m(\angle ABC)$, de unde concluzia. **2p**



Soluţia 2: (*Laurenţiu Ploscaru*)
Fie M mijlocul lui $[BC]$ şi D simetricul lui A faţă de mediatoarea, PM, a lui $[BC]$. **2p**
Atunci $AP = PD$ (din simetrie) şi $AD \parallel BC$ (ambele perpendiculare pe PM). Tot din simetrie, $m(\angle DBC) = m(\angle C) = 2m(\angle B)$, deci $m(\angle DBA) = m(\angle B) = m(\angle DAB)$ (alterne interne). Deducem că triunghiul ABD este isoscel, deci $DA = DB = AC = AP = PD$, adică triunghiul APD este echilateral. **3p**
Atunci D este centrul cercului circumscris triunghiului ABP, deci $m(\angle PAC) = m(\angle PDB) = 2 \cdot m(\angle BAP)$ (unghiul la centru $\angle BDP$ şi unghiul pe cerc $\angle BAP$ subîntind, amândouă, arcul BP). **2p**

Remarcă: Pentru ca $P \in int(\Delta\, ABC)$ trebuie ca $30° < m(\angle B) < 60°$.