Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 21 august 2019

Clasa a VII-a

Problema 1. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Avem n cartonaşe pe care sunt scrise numerele de la 1 la n şi n urne, şi ele numerotate de la 1 la n. În fiecare urnă se introduce câte unul din cartonaşe, apoi, pentru fiecare urnă, se face suma dintre numărul urnei şi cel scris pe cartonaşul aflat în urnă.
a) Arătaţi că dacă n este număr par, printre cele n sume calculate, vor exista două care dau acelaşi rest la împărţirea cu n.
b) Arătaţi că oricare ar fi $n > 2$ un număr natural impar, distribuirea cartonaşelor în urne se poate face în aşa fel încât cele n sume să dea resturi diferite la împărţirea cu n.

ViitoriOlimpici.ro

Problema 2. Numim o mulţime M de numere naturale „bună” dacă, pentru orice $x \in M$, cel puţin unul dintre numerele $x+1$ şi $\sqrt{x}$ se află în M.
a) Determinaţi toate mulţimile bune de 4 elemente.
b) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există o mulţime bună cu n elemente.

Problema 3. În triunghiul ABC, $m(\angle C) = 2 \cdot m(\angle B)$. Punctul P este un punct în interiorul triunghiului ABC care are proprietatea că $AP = AC$ şi $PB = PC$. Demonstraţi că $m(\angle PAC) = 2 \cdot m(\angle BAP)$.