CLASA a VII-a; SOLUŢII

1. *Arătaţi că pentru orice numere pozitive a, b, c are loc inegalitatea*

$$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}\leq\frac{3}{2}.$$

Soluţie: Din inegalitatea mediilor rezultă inegalităţile

$$\begin{array}{l}\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right)\\ \frac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)\\ \frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+c}+\frac{c}{b+c}\right),\end{array}\qquad(1)$$

care prin adunare conduc la inegalitatea din enunţ.

Barem:

obţine inegalităţile (1)	$5\,p$
adună inegalităţile şi finalizează	$2\,p$
Total	**7 p**

2. *Arătaţi că nu există numere naturale nenule x, y, z, t care să verifice sistemul de ecuaţii*

$$\begin{cases}x^2+6y^2=z^2\\ 6x^2+y^2=t^2\end{cases}.$$

Soluţie: Fie $x, y, z, t\in\mathbb{N}$ numere naturale care verifică sistemul din enunţ. Adunând ecuaţiile sistemului se obţine că

$$7(x^2+y^2)=z^2+t^2.\qquad(1)$$

Această egalitate este posibilă doar dacă $7|z$ şi $7|t$. Fie $z_1:=\frac{z}{7}$ şi $t_1:=\frac{t}{7}$. Din (1) rezultă atunci că $7(z_1^2+t_1^2)=x^2+y^2$, astfel că $x=7x_1$, $y=7y_1$, cu $x_1, y_1\in\mathbb{N}$. Împărţind ecuaţiile iniţiale prin 7^2, deducem că x_1, y_1, z_1, t_1 verifică de asemenea sistemul. Repetând raţionamentul(i.e., prin inducţie matematică) rezultă că x, y, z, t sunt divizibile prin 7^n pentru orice număr natural n. Acest lucru este posibil doar dacă $x=y=z=t=0$, astfel că sistemul dat nu are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule.

Barem:

obţine egalitatea (1)	$1\,p$
obţine $7\|z$ şi $7\|t$	$1\,p$
deduce că $7(z_1^2+t_1^2)=x^2+y^2$, unde $z_1:=\frac{z}{7}$, $t_1:=\frac{t}{7}$	$1\,p$
obţine $7\|x$ şi $7\|y$	$1\,p$
arată că x_1, y_1, z_1, t_1 este soluţie a sistemului	$1\,p$
deduce că 7^n divide x, y, z, t pentru orice $n\in\mathbb{N}$	$1\,p$
deduce că $x=y=z=t=0$, deci nu există soluţii nenule	$1\,p$
Total	**7 p**

3. *Fie* $\Delta\, ABC$ *un triunghi isoscel, cu* $(AB) \equiv (AC)$ *şi* $m(\widehat{ABC}) = 80°$*, iar* $D \in (AC)$ *un punct astfel încât* $m(\widehat{DBC}) = 70°$*. Arătaţi că* $(AD) \equiv (BC)$*.*

Soluţie(var.1): În semiplanul complementar semiplanului $(AC, B$ se consideră punctul E astfel încât $m(\widehat{EAC}) = 40°$ şi $(AE) \equiv (AC)$. Rezultă atunci că:
- $\Delta\, ABE$ este echilateral,
- $\widehat{EBC} \equiv \widehat{DAB}$, cu măsurile de $20°$,
- $\widehat{BEC} \equiv \widehat{ABD}$, cu măsurile de $10°$,
- $\Delta\, ABD \equiv \Delta\, BEC$. Atunci $(AD) \equiv (BC)$.

Barem(var.1):

consideră E în semiplanul complementar semiplanului $(AC, B$, cu $m(\widehat{EAC}) = 40°$ şi $(AE) \equiv (AC)$	$2\,p$
arată că $\Delta\, ABE$ este echilateral	$1\,p$
arată că $\widehat{EBC} \equiv \widehat{DAB}$	$1\,p$
arată că $\widehat{BEC} \equiv \widehat{ABD}$	$1\,p$
arată că $\Delta\, ABD \equiv \Delta\, BEC$	$1\,p$
deduce că $(AD) \equiv (BC)$	$1\,p$
Total	**7 p**

Soluţie(var.2): Măsura unghiului $\widehat{BAC}$ este

$$m(\widehat{BAC}) = 180° - 2m(\widehat{ABC}) = 20°.$$

Fie $E \in (AC)$ şi $F \in (AB)$ puncte cu $m(EBC) = m(FCB) = 60°$, iar $M \in (BE) \cap (CF)$. Rezultă atunci că:
- $\Delta\, BEC \equiv \Delta\, CFB$,
- triunghiurile $\Delta\, AEB$ şi $\Delta\, AFC$ sunt isoscele şi congruente, cu $(AE) \equiv (AF) \equiv (BE) \equiv (CF)$,
- $FE \| BC$, astfel că $\Delta\, AFE \sim \Delta\, ABC$,
- triunghiurile $\Delta\, MBC$ şi $\Delta\, MEF$ sunt echilaterale,
- $(BD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ABE}$.

Folosind teorema bisectoarei în triunghiul $\Delta\, ABE$, precum şi asemănările şi congruenţele obţinute, putem scrie egalităţile:

$$\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BE} = \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF} = \frac{BM}{ME}. \quad (1)$$

Dar atunci rezultă că

$$\frac{AE}{DE} = \frac{BE}{ME},$$

de unde $(DE) \equiv (ME)$, deci şi $(DE) \equiv (EF)$. Din (1) rezultă atunci că $(AD) \equiv (BC)$.

Barem(var.2):

consideră $E \in (AC)$, $F \in (AB)$ cu $m(EBC) = m(FCB) = 60^\circ$	
şi $M \in (BE) \cap (CF)$	$2\,p$
obţine egalităţile (1)	$2\,p$
arată că $(DE) \equiv (ME) \equiv (EF)$	$2\,p$
deduce că $(AD) \equiv (BC)$	$1\,p$
Total	**7 p**