Problema 1. Fie mulţimea $S = \{(x+y)^7 - x^7 - y^7 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Determinaţi cel mai mare divizor comun al numerelor din S.

D. Şerbănescu

Soluţia. Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor din S. Deoarece $2^7 - 2 = 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \in S$ pentru $x = y = 1$, se obţine că d divide 126. Acum, pentru $x = 2$ şi $y = 1$, obţinem $(2+1)^7 - 2^7 - 1 = 3^7 - 2^7 - 1 \in S$, şi deci d va divide numărul $(3^7 - 2^7 - 1) + (2^7 - 2) = 3^7 - 3$. Deoarece 9 nu divide $3^7 - 3$, rezultă că d divide $126/3 = 42$.

Să verificăm că $\boxed{d = 42}$, deci că numerele prime 2, 3 şi 7 divid pe $(x + y)^7 - x^7 - y^7$, pentru orice numere întregi x şi y. Observăm că este suficient să arătăm că 42 divide $a^7 - a$ pentru orice număr întreg a, căci putem scrie

$$(x+y)^7 - x^7 - y^7 = \left((x+y)^7 - (x+y)\right) - (x^7 - x) - (y^7 - y).$$

Dar $a^7 - a = a(a-1)(a+1)(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$. Acum 2 divide $a(a-1)$, 3 divide $a(a-1)(a+1)$, iar 7 divide $a^7 - a$, din mica teoremă a lui Fermat, sau, mai simplu, 7 va divide $(x+y)^7 - x^7 - y^7$, expresie egală cu (din binomul lui Newton) $7(x^6y + 3x^5y^2 + 5x^4y^3 + 5x^3y^4 + 3x^2y^5 + xy^6)$. ■

Problema 2. Determinaţi toate perechile de numere naturale nenule a şi b pentru care $a^6 \geq 5^{b+1}$ şi $b^6 \geq 5^{a+1}$.

D. Şerbănescu

Soluţia. Vom arăta că inegalitatea $5^{n+1} \geq n^6$ este valabilă pentru numerele naturale nenule n, mai puţin $n = 3$ şi $n = 4$.

Într-adevăr, se verifică uşor pentru $n = 1$, $n = 2$ şi $n = 5$. Dacă afirmaţia este adevărată pentru $n \geq 5$, atunci vom avea $5^{n+2} = 5 \cdot 5^{n+1} \geq 5n^6$. Este suficient atunci să arătăm că $5n^6 \geq (n+1)^6$, ceea ce se rescrie ca $5 \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^6$. Deoarece $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^6 < \left(1 + \frac{1}{4}\right)^6 = 5 \cdot \frac{5^5}{4^6} = 5 \cdot \frac{3125}{4096} < 5$, totul e demonstrat (prin simplă inducţie); mai mult, inegalitatea devine strictă pentru $n > 5$.

Astfel obţinem $5^{a+1} \geq a^6$ şi $5^{b+1} \geq b^6$, pentru toţi a, b diferiţi de 3 şi 4. Înmulţind inegalităţile din enunţ, şi apoi cele de mai sus, obţinem $a^6 b^6 \geq 5^{b+1} 5^{a+1} \geq b^6 a^6$. Dar această egalitate se poate obţine aici numai dacă $\boxed{a = b = 5}$, care evident verifică. Altfel, trebuie ca $a = 4$ sau $a = 3$ (sau, simetric, $b = 4$ sau $b = 3$). Dacă $a = 4$, atunci inegalităţile din enunţ devin $4^6 > 5^{b+1}$ şi $b^6 > 5^5$, implicând $b \leq 4$ şi $b \geq 4$ respectiv, deci $b = 4$. Dacă $a = 3$, atunci $3^6 > 5^{b+1}$ şi $b^6 > 5^4$, implicând $b \leq 3$ şi $b \geq 3$ respectiv, deci $b = 3$.

Am găsit deci două noi perechi $\boxed{a = b = 4 \text{ şi } a = b = 3}$. ■

Problema 3. Fie o foaie infinită partiţionată în pătrăţele de latură 1. Se colorează interiorul fiecărui pătrăţel cu una din culorile *roşu* sau *negru* (laturile pătrăţelelor nu sunt considerate a fi colorate). Arătaţi că pentru orice număr întreg pozitiv α există un triunghi echilateral de arie număr întreg $\mathcal{A} \geq \alpha$, cu vârfurile în pătrăţele de aceeaşi culoare.

R. Gologan

Soluţia. (D. Schwarz) Ca de obicei în astfel de situaţii, se pune problema colorării liniilor despărţitoare. Una din idei ar fi ca pătrăţelul să fie considerat a fi format din interiorul său, împreună cu laturile stânga şi jos, dar mai puţin vârfurile nord-vest şi sud-est. Astfel realizăm o partiţie a planului dată de

$$\bigcup_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2} \{(x,y)\ ;\ a \leq x < a+1,\ b \leq y < b+1\}.$$

O altă idee ar fi să nu colorăm de loc laturile pătrăţelelor; idee care a fost aleasă pentru problema de faţă. Aceasta introduce şi mica dificultate suplimentară de a evita punctele necolorate ale planului.

Ideea demonstraţiei este bazată pe cunoscuta configuraţie care garantează existenţa unui triunghi echilateral monocromatic în planul bicolor.[1] Să alegem o valoare ℓ a laturii unui triunghi echilateral de arie număr întreg α, deci $\ell = \sqrt{\dfrac{4\alpha}{\sqrt{3}}}$. Fie γ cercul de rază ℓ şi centru un punct A de culoarea c_1, şi Γ cercul de acelaşi centru şi rază $\ell\sqrt{3}$. Punctele de intersecţie ale cercurilor γ şi Γ cu laturile pătrăţelelor sunt evident în număr finit, şi aceste puncte trebuie evitate, fiind necolorate.

Dacă toate punctele de pe γ (în afară de cel mult un număr finit) sunt de culoare c_2, atunci există un triunghi echilateral cu vârfurile dintre acestea, şi de arie 3α. Dacă nu, fie $B \in \gamma$ de culoare c_1, şi fie hexagonul regulat $BCDEFG$ înscris în γ. Atunci vârfurile trebuie să aibă culorile $C \to c_2$, $G \to c_2$, $E \to c_1$, $D \to c_2$, $F \to c_2$, altfel se formează un triunghi echilateral de arie α sau 3α. Fie acum $H = BC \cap DE$; evident $H \in \Gamma$. Dacă H are culoarea c_2, atunci $\triangle CDH$ este monocromatic c_2 şi are aria α; dacă H are culoarea c_1, atunci $\triangle BEH$ este monocromatic c_1 şi are aria 4α. ■

[1] A se vedea în acest sens articolul [Vasile Pop, Configuraţii monocolore în probleme de colorare, Problema 9], pe site-ul `http://www.viitoriolimpici.ro`.