Problema 1. Demonstraţi că, pentru orice întreg $n > 2$, există o mulţime X_n formată din n numere întregi strict pozitive (distincte), astfel încât orice element a al lui X_n divide suma $\sigma(X_n) = \sum_{x \in X_n} x$, a tuturor elementelor lui X_n.

D. Schwarz

Soluţia. Nu există o astfel de mulţime X_2 (trivial), dar există X_n pentru orice $n \neq 2$ (iarăşi trivial pentru $n = 1$). Să considerăm oricare reprezentare cu fracţii egiptene (x_i întregi pozitivi distincţi) pentru 1

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = 1 \text{ şi să luăm } a_j = \frac{1}{x_j} \prod_{i=1}^{n} x_i, \text{ şi } X_n = \{a_j \; ; \; 1 \leq j \leq n\}.$$

Atunci $\sigma(X_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}\right) = \prod_{i=1}^{n} x_i$, deci $\sigma(X_n) = x_i a_i$, prin urmare $a_i \mid \sigma(X_n)$ (şi $n > 2$ poate fi ales la discreţie).

Există şi o soluţie imediată prin simplă inducţie. Să luăm $X_3 = \{1, 2, 3\}$ şi $X_{n+1} = X_n \cup \{\sigma(X_n)\}$. ■

Problema 2. Fie date trei numere întregi a, b, c, cu suma $\sigma = a+b+c > 0$. Dacă printre cele trei numere există (măcar) unul negativ, de exemplu $a < 0$, este permisă înlocuirea celor trei numere cu noile numere $a' = -a$, $b' = b+a$, $c' = c + a$. Demonstraţi că într-un număr finit de astfel de paşi, toate cele trei numere devin mai mari sau egale cu zero.

Adaptare OIM

Soluţia. Aceasta este o variaţiune pe o temă clasică cu un leitmotiv de *invariant* (vezi IMO 1986 – Problema 3, pentru cinci numere). Este clar că σ este invariant la paşii permişi. Construim un semi-invariant $\Sigma(a, b, c) := a^2 + b^2 + c^2$. Atunci, de exemplu pentru $a < 0$, simple calcule produc $0 < \Sigma(a', b', c') = \Sigma(-a, b + a, c + a) = \Sigma(a, b, c) + 2a\sigma < \Sigma(a, b, c)$.

Deci semi-invariantul descreşte cu cel puţin 2σ la fiecare pas, aşadar după un număr finit de paşi toate cele trei numere devin mai mari sau egale cu zero, căci semi-invariantul trebuie să rămână strict pozitiv (o aplicare a metodei descinderii infinite). ■

Problema 3. Fie un şir $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$ de numere întregi, şi un număr M astfel încât $a_{n+1} - a_n < M$ pentru orice $n \geq 1$. Demonstraţi că, în afara a cel mult un număr finit de numere prime, pentru orice alt număr prim p există (măcar) un termen al şirului divizibil prin p.

***

Soluţia. Fie $p_1, p_2, \ldots, p_k$ numere prime astfel încât niciun termen al şirului nu este divizibil prin niciunul dintre ele. Sistemul de congruenţe $x + i \equiv$ (mod p_i), $1 \leq i \leq k$, are soluţii întregi

$$x = x_0 + m \prod_{i=1}^{k} p_i, \text{ pentru un anume } x_0 \in \mathbb{Z} \text{ şi orice } m \in \mathbb{Z},$$

din Lema Chineză a Resturilor. Alegem $m > 0$ astfel încât $x > a_1$. Deoarece "pasul" $a_{n+1} - a_n$ al şirului este mai mic decât M, obţinem o contradicţie dacă $k > M$. Prin urmare cel mult $\lfloor M \rfloor$ numere prime nu divid niciun termen al şirului. ■