Problema 1. Pentru x, y, z, numere reale, determinaţi valoarea minimă a lui x pentru care avem

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - yz - zx = 1.$$

Albania, BMO2009 ShortList

Soluţia. Relaţia dată este echivalentă cu

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z\right)^2 + \frac{7}{4}\left(\frac{1}{7}x + y\right)^2 + \frac{5}{7}x^2 = 1,$$

de unde $\frac{5}{7}x^2 \leq 1$, deci $-\sqrt{\frac{7}{5}} \leq x \leq \sqrt{\frac{7}{5}}$. Prin urmare valoarea minimă a lui x este $-\sqrt{\frac{7}{5}}$ (iar egalitatea se realizează pentru $y = -\frac{1}{7}x = \sqrt{\frac{1}{35}}$ şi $z = \frac{x+y}{2} = -6\sqrt{\frac{1}{35}}$). ■

Problema 2. În triunghiul ABC, unghiul $\angle BAC$ este ascuţit, bisectoarea unghiului $\angle BAC$ intersectează BC în punctul D, K este piciorul perpendicularei din B pe AC, şi $\angle ADB = 45°$. Punctul P se află între K şi C, astfel încât $\angle KDP = 30°$. Punctul Q se află pe semidreapta DP, astfel încât $DQ = DK$. Perpendiculara în P pe AC intersectează KD în punctul L. Demonstraţi că $PL^2 = DQ \cdot PQ$.

Albania, BMO2009 ShortList

Soluţia. Fie O piciorul perpendicularei din B pe AD; atunci BO intersectează AC în T.

Patrulaterul $ABOK$ este inscriptibil ($\angle AKB = \angle AOB = 90°$), deci $\angle BKO = \angle BAO = \angle KAO = \angle KBO$, astfel $OB = OK$. Triunghiul BOD este isoscel, deci $OD = OB$. Finalmente, $OB = OT$, prin urmare patrulaterul $BKTD$ este inscriptibil (cu centrul cercului circumscris O şi diametru BT).

Rezultă că $\angle DKP = \angle DBT = 45°$, deci triunghiul PKQ este isoscel, căci triunghiul KDQ este isoscel, prin urmare $\angle PQK = \angle QPK = 75°$. Triunghiul KPL fiind evident isoscel, rezultă că $LP = KP = KQ$. Acum concluzia rezultă din asemănarea triunghiurilor PKQ şi KDQ. ■

Problema 3. Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia

$$y^3 = 8x^6 + 2x^3y - y^2.$$

Albania, BMO2009 ShortList

Soluţia. Ecuaţia se poate scrie în forma echivalentă

$$y^2(y+1) = 2x^3(4x^3 + y).$$

Soluţiile $(x, y) = (0, 0), (0, -1), (1, 2)$ sunt uşor de găsit, şi se verifică imediat că nu sunt altele pentru x sau y în $\{-1, 0, 1\}$. Considerăm celelalte posibilităţi.

Pentru un prim p care divide pe y, astfel încât $p^a || y$ (notaţie pentru a fiind cea mai mare putere a lui p care divide pe y), cu $a > 0$, rezultă că $p|x$, deci fie $p^b||x$, $b > 0$. Egalizând puterile lui p în cele două părţi ne dă $2a = 3b + a$ pentru $a < 3b$, sau $2a = 6b$ pentru $a > 3b$, ambele imposibile, deci $a = 3b$. Dacă y este impar, rezultă $y = x^3$, şi deci $x^6(x^3+1) = 2x^3(4x^3+x^3) = 10x^6$, aşadar $x^3 = 9$, imposibil.

Dacă y este par, astfel încât $2^a||y$, cu $a > 0$, şi $2^b||x$, $b \geq 0$, egalizând puterile lui 2 în cele două părţi ne dă $2a = 3b + a + 1$ pentru $a < 3b + 2$, sau $2a = 6b + 3$ pentru $a > 3b + 2$, ceea ce este imposibil, deci $a = 3b + 1$. Combinând cu rezultatul anterior, rezultă $x = 2^b z$, $y = 2^{3b+1}z^3$, cu z impar, şi deci $2^{6b+2}z^6(2^{3b+1}z^3+1) = 2^{3b+1}z^3(2^{3b+2}z^3+2^{3b+1}z^3) = 2^{6b+2}z^6 3$, aşadar $2^{3b+1}z^3 + 1 = 3$, sau $b = 0$ şi $z = 1$, ceea ce duce la $x = 1$, absurd.

Prin urmare soluţiile prezentate la început sunt singurele. ■