**Problemă.** Să se arate că orice mulţime de numere întregi cu 2012 elemente conţine o submulţime cu proprietatea că suma elementelor acestei submulţimi este divizibilă cu 2012.

*Manuela Prajea , Drobeta Turnu-Severin*

**Soluţie** Fie $A = \{a_1,\ a_2,\ ..., a_{2012}\} \subset \mathbb{Z}$ şi numerele întregi $N_1 = a_1;\ N_2 = a_1 + a_2;\ ...;\ N_{2012} = a_1 + a_2 + ... + a_{2021}$

i) Dacă unul dintre aceste numere e divizibil cu 2012 atunci problema e rezolvată.

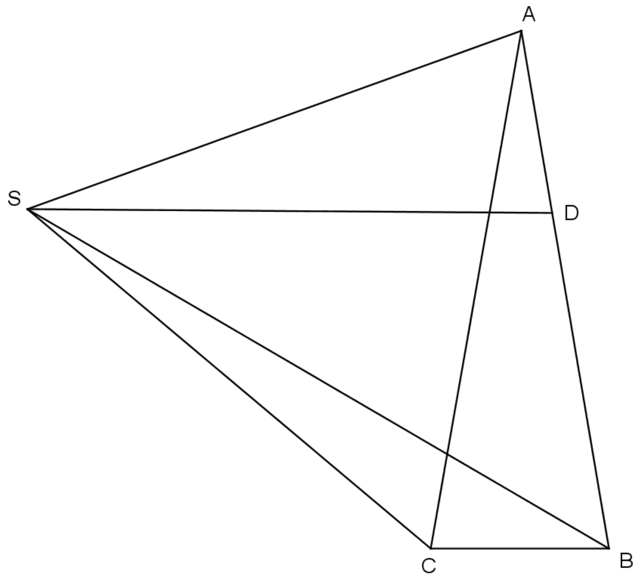
Dacă $N_k \ \vdots\ 2012$ atunci $\{a_1,\ a_2,\ ..., a_k\}$ e submulţimea căutată.

ii) Dacă niciunul din numerele $N_1,\ N_2,\ ...\ N_{2012}$ nu este divizibil cu 2012, atunci resturile posibile la împărţirea lor cu 2012 ar fi din mulţimea $\{1,\ 2,\ ...,\ 2011\}$. Cum sunt 2012 numere şi 2011 resturi posibile, conform principiului cutiei, există două dintre ele care dau acelaşi rest la împărţirea cu 2012. Fie acestea $N_i$ şi $N_j$, $i < j$. Atunci $N_j - N_i \ \vdots\ 2012$ şi cum $N_j - N_i = a_{i+1} + a_{i+2} + ... + a_j$ avem că $\{a_{i+1},\ a_{i+2},\ ...,\ a_j\}$ va fi submulţimea căutată.

**Problemă.** Se consideră triunghiul isoscel $ABC$ având $AB = AC$ şi $m(\widehat{A}) = 20^0$. Fie $D \in (AB)$ astfel ca $AD = BC$, iar $E$ astfel încât $DE \parallel BC$ şi $m(\widehat{DBE}) = 50^0$ . Arătaţi că triunghiul $EAC$ este echilateral.

*Manuela Prajea , Drobeta Turnu-Severin*

**Soluţie**




Fie $S$ astfel încât $AS = AC$, $m(\widehat{SAC}) = 60^0$ şi $C \in Int(\widehat{SAB}$, adică $\triangle SAC$ este echilateral (1).

Atunci $m(\widehat{SAD}) = m(\widehat{ABC}) = 80^0$ şi prin urmare $\triangle SAD \equiv \triangle ABC$ $(LUL)$ . Cum şi $m(\widehat{SDA}) = 80^0$ rezultă $SD \parallel BC$, dar $DE \parallel BC$, prin urmare $S$, $E$ şi $D$ sunt coliniare (2).

Triunghiul $SAB$ are $m(\widehat{A}) = 80^0$ şi $SA = AB$, adică avem un triunghi isoscel, de unde rezultă $m(\widehat{SBA}) = 50^0 = m(\widehat{DBS})$, dar $m(\widehat{DBE}) = 50^0$ ceea ce conduce la $S$, $E$ şi $B$

coliniare (3).

Din (2) şi (3) deducem că $E \in SD \cap SB$, adică $E = S$ şi ţinând cont de (1) ajungem la $\triangle EAC$ echilateral.

**Problemă.** 3. Fie $a,\ b,\ c$ numere naturale, astfel încât $ab,\ bc,\ ca$ să fie cuburi perfecte. Să se arate că şi $a,\ b,\ c$ sunt de asemenea cuburi perfecte.

*Elena Maria Panaitopol, Bucureşti*

**Soluţie** Notăm $ab = x^3,\ bc = y^3,\ ca = z^3\ \ (x, y, z \in \mathbb{N})$ . După înmulţire obţinem $a^2b^2c^2 = (xyz)^3$, care conduce la $abc = xyz\sqrt{xyz}$. Cum $a,\ b$ şi $c$ sunt naturale deducem că $xyz$ este pătrat perfect. Notăm $xyz = t^2$ cu $t$ număr natural şi vom avea $abc = t^3$. Atunci $a = \frac{t^3}{bc} = \frac{t^3}{y^3} = \left(\frac{t}{y}\right)^3$, $b = \left(\frac{t}{z}\right)^3$ şi $c = \left(\frac{t}{x}\right)^3$, care sunt cuburi perfecte.

Rămâne să vedem dacă sunt şi numere naturale.

Cum $abc$ se divide cu $ab$, înseamnă că $t^3$ se divide cu $x^3$, aşadar $t$ se divide cu $x$ şi prin urmare $c$ este număr natural.

Analog şi $y$, respectiv $z$ îl divid pe $t$, adică şi $a$, respectiv $b$ sunt de asemenea numere naturale.

**Problemă.** Demonstraţi că, fiind dat un număr întreg strict pozitiv $n$, numărul $\frac{1}{n}$ are o reprezentare finită în baza de numeraţie 60 dacă şi numai dacă $n = 2^i 3^j 5^k$, pentru nişte întregi $i, j, k \geq 0$.

* * *

**Soluţie.** Este acelaşi principiu de demonstraţie ca şi pentru baza 10, unde singurele fracţii $\frac{1}{n}$ care au o reprezentare finită sunt cele pentru care $n = 2^i 5^j$, pentru nişte întregi $i, j \geq 0$.

Una dintre implicaţii este imediată. Fie $m = \max\{i, j, k\}$; atunci $\frac{1}{n} = \frac{1}{2^i 3^j 5^k} = \frac{2^{m-i} 3^{m-j} 5^{m-k}}{60^m}$ (considerăm şi $n > 1$). Numărul $N = 2^{m-i} 3^{m-j} 5^{m-k}$ are o reprezentare unică în baza 60, de forma $N = a_1 \cdot 60^{m_1} + a_2 \cdot 60^{m_2} + \cdots + a_\ell \cdot 60^{m_\ell}$, unde $m > m_1 > m_2 > \cdots > m_\ell \geq 0$ şi $0 \leq a_t < 60$ pentru toţi $1 \leq t \leq \ell$. Rezultă $\frac{1}{n} = a_\ell \cdot 60^{m_\ell - m} + \cdots + a_2 \cdot 60^{m_2 - m} + a_1 \cdot 60^{m_1 - m}$, ceea ce dorim.

Pe de altă parte, dacă există un prim $p \neq 2, 3, 5$ astfel ca $p \mid n$, şi dacă presupunem $\frac{1}{n} = a_1 \cdot 60^{-m_1} + a_2 \cdot 60^{-m_2} + \cdots + a_\ell \cdot 60^{-m_\ell}$, unde $1 < m_1 < m_2 < \cdots < m_\ell$ şi $0 \leq a_t < 60$ pentru toţi $1 \leq t \leq \ell$, aducând la acelaşi numitor obţinem un numitor format numai din divizori primi ai lui 60, adică $2, 3$ şi 5, la diverse puteri, contradicţie.