BAREM DE NOTARE

Problema 1. Fie o grămadă formată din cel puţin 2010 monede (fiecare având ca valoare un număr întreg de bani), cu suma valorilor tuturor monezilor 4018 bani. Să se demonstreze că putem împărţi monedele în două grămezi, ambele având aceeaşi sumă.

Barem:

Fie $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ valorile celor n monezi ($n \geq 2010$). Evident $x_1 > 0$ şi $x_n < 4018$ 1p

Calculăm sumele:

$S_1 = x_1$

$S_2 = x_1 + x_2$

....

$S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ 1p

Împărţim cu rest cele n sume la 2009 1p

Avem măcar o sumă în plus ($n \geq 2010$) faţă de numărul posibil de resturi, deci două resturi sunt egale 2p

Există $i < j$ cu $S_i \equiv S_j$ (mod 2009), de unde

$S_j - S_i = x_{i+1} + ... + x_j = M_{2009}$ 1p

$0 < S_j - S_i < 4018$, deci $S_j - S_i = 2009$ 1p

BAREM DE NOTARE

Problema 2. Fie $ABCD$ un tetraedru, I_A, I_B, I_C respectiv I_D centrele cercurilor înscrise în triunghiurile BCD, DCA, BDA respectiv ABC. Arătaţi că dreptele AI_A, BI_B, CI_C, DI_D sunt concurente dacă şi numai dacă $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

Barem:

Fie $\{E\} = BI_A \cap CD$ şi $E' = AI_B \cap CD$.

Este evident că $AI_A \cap BI_B = \emptyset \Leftrightarrow$ $E' = E$ 2p

Din teorema bisectoarei în triunghiurile ACD şi BCD rezultă

$\frac{ED}{EC} = \frac{BD}{BC}$ şi $\frac{E'D}{E'C} = \frac{AD}{AC}$ (1) 1p

$E' = E \Leftrightarrow \frac{ED}{EC} = \frac{E'D}{E'C} \Leftrightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC}$ (conform cu 1) $\Leftrightarrow$

$AD \cdot BC = AC \cdot BD$ (2) 1p

Analog se arată că $AI_A \cap CI_C \neq \emptyset \Leftrightarrow$AC$\cdot BD = AB \cdot CD$ (3)

$BI_B \cap CI_C \neq \emptyset \Leftrightarrow$BC$\cdot DA = AB \cdot CD$ (4) 1p

Directa:

$AI_A \cap BI_B \cap CI_C \cap DI_D \neq \emptyset \Rightarrow$AB$\cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$

(conform 2 şi 3) 1p

Reciproca:

(2)$\Rightarrow$AI$_A \cap BI_B \neq \emptyset$

(3)$\Rightarrow$AI$_A \cap CI_C \neq \emptyset$

Analog

$AI_A \cap DI_D \neq \emptyset$; $BI_B \cap CI_C \neq \emptyset$; $BI_B \cap DI_D \neq \emptyset$; $CI_C \cap DI_D \neq \emptyset$

Cum dreptele AI_A, BI_B, CI_C, DI_D sunt necoplanare rezultă că toate patru sunt concurente 1p

BAREM DE NOTARE

Problema 3. a) Să se arate că dintre cinci numere naturale oarecare se pot alege trei cu suma divizibilă cu trei.

b) Să se demonstreze că oricare 17 numere naturale au proprietatea că printre ele găsim 9 cu suma divizibilă cu 9.

c) Să se arate că numărul 17 de la punctul b) este cel mai mic cu proprietatea de mai sus.

Barem:

a) Dacă avem trei resturi egale la împărţirea cu 3, aceste trei numere vor fi cele alese 1p

Dacă nu avem trei resturi egale, folosind principiul cutiei avem un rest 0, un rest 1, un rest 2. Aceste numere vor fi cele alese 1p

b) Împărţim în trei grupe de câte cinci numere şi din fiecare grupă extragem câte trei numere cu suma divizibilă cu 3 (conform punctului a) 1p

Ne vor rămâne $17 - 9 = 8$ numere. Formăm încă o grupă de 5 şi extragem trei cu suma divizibilă cu 3 1p

În final rămâne o grupă de cinci numere şi extragem trei dintre ele cu suma divizibilă cu 3. Avem cinci grupe de câte trei numere cu suma divizibilă cu 3. 1p

Raţionând ca la punctul (a) (dar relativ la împărţirea cu 9) obţinem cerinţa 1p

c) Un exemplu este $9k_1, 9k_2, ..., 9k_8, 9l_1 + 1, 9l_2 + 1, ..., 9l_8 + 1$ 1p