Problema săptămânii 158

Fie $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_{2n-1} \geq a_{2n} \geq 0$ numere reale cu proprietatea $\sum_{i=1}^{2n} a_i = 1$.

Arătaţi că

$$a_1a_2 + 3a_3a_4 + 5a_5a_6 + \ldots + (2n-1)a_{2n-1}a_{2n} \leq \frac{1}{4}.$$

Când are loc egalitatea?

KöMaL, problema B.4905

Soluţie: (inducţie)
Vom demonstra prin inducţie după $k \geq 1$ că dacă $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_{2k-1} \geq a_{2k} \geq 0$, atunci

$$a_1a_2 + 3a_3a_4 + 5a_5a_6 + \ldots + (2k-1)a_{2k-1}a_{2k} \leq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k})^2}{4}.$$

Pentru $k = 1$ afirmaţia $a_1a_2 \leq \frac{(a_1+a_2)^2}{4}$ este echivalentă cu $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$.
Egalitatea are loc dacă $a_1 = a_2$.
Presupunând afirmaţia adevărată pentru $k-1$, să o demonstrăm pentru k.
Este suficient să demonstrăm că

$$(2k-1)a_{2k-1}a_{2k} \leq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k})^2}{4} - \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k-2})^2}{4},$$

adică $4(2k-1)a_{2k-1}a_{2k} \leq (a_{2k-1} + a_{2k})^2 + 2(a_{2k-1} + a_{2k})(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k-2})$.
Avem $(a_{2k-1} + a_{2k})^2 \geq 4a_{2k-1}a_{2k}$, cu egalitate dacă $a_{2k-1} = a_{2k}$, şi $a_{2k-1}a_{2k} \leq a_ia_j$ pentru orice $i \in \{2k-1, 2k\}$ şi orice $j \in \{1, 2, \ldots, a_{2k-2}\}$ (datorită inegalităţilor $0 \leq a_{2k} \leq a_{2k-1} \leq a_j$). Aici avem egalitate în toate aceste inegalităţi fie atunci când $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2k}$, fie atunci când $a_{2k-1} = a_{2k} = 0$.
Combinând aceste inegalităţi obţinem că $4(2k-1)a_{2k-1}a_{2k} \leq (a_{2k-1} + a_{2k})^2 + 2(a_{2k-1} + a_{2k})(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k-2})$.
Inegalitatea este astfel demonstrată. Pentru a avea egalitate în inegalitatea pentru $k = n$, echivalentă cu cea din enunţ datorită condiţiei $\sum_{i=1}^{2n} a_i = 1$, trebuie să avem egalitate în fiecare din inegalităţile scrise pentru $k = 1, 2, \ldots, n$, deci trebuie să avem $a_{2k-1} = a_{2k}$ pentru fiecare k şi să avem pentru orice k, fie $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2k}$, fie $a_{2k-1} = a_{2k} = 0$. Obţinem cazurile de egalitate $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2n} = \frac{1}{2n}$ şi $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2s} = \frac{1}{2s}$, $a_{2s+1} = a_{2s+2} = \ldots = a_{2n} = 0$ cu $1 \leq s \leq n-1$ arbitrar.

Remarcă: Soluţia de mai sus poate fi rescrisă fără inducţie, astfel:
omogenizând, inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu

$$a_1a_2 + 3a_3a_4 + 5a_5a_6 + \ldots + (2n-1)a_{2n-1}a_{2n} \leq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n})^2}{4},$$

deci cu $4a_1a_2 + 12a_3a_4 + 20a_5a_6 + \ldots + 4(2n-1)a_{2n-1}a_{2n} \le (a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n})^2$. Ea se obţine adunând inegalităţile $4(2k-1)a_{2k-1}a_{2k} \le a_{2k-1}^2 + a_{2k}^2 + 2a_{2k-1}\sum_{i=1}^{2k-2} a_i + 2a_{2k}\sum_{i=1}^{2k-1} a_i$ scrise pentru $k = 1, 2, \ldots, n$ şi care inegalităţi se demonstrează ca ma sus. Pentru cazul de egalitate, trebuie să avem egalitate în fiecare din inegalităţile pe care le-am adunat.

Am primit soluţii de la *Andrei-Giovani Chiriţă, Marius Valentin Drăgoi, Ionuţ Mihai Drăgoi, Gabriel Turbincă, Ioana Stănoiu, Daniel Văcaru.*

Problem of the week no. 158

Let $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_{2n-1} \ge a_{2n} \ge 0$ such that $\sum_{i=1}^{2n} a_i = 1$. Prove that

$$a_1a_2 + 3a_3a_4 + 5a_5a_6 + \ldots + (2n-1)a_{2n-1}a_{2n} \le \frac{1}{4}.$$

When does the equality hold?

KöMaL, problem B. 4905

Solution: (induction)
We prove by induction after $k \ge 1$ the following statement: if $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_{2k-1} \ge a_{2k} \ge 0$, then

$$a_1a_2 + 3a_3a_4 + 5a_5a_6 + \ldots + (2k-1)a_{2k-1}a_{2k} \le \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k})^2}{4}.$$

For $k = 1$ the statement becomes $a_1a_2 \le \frac{(a_1 + a_2)^2}{4}$ and is equivalent to $(a_1 - a_2)^2 \ge 0$. Equality holds if $a_1 = a_2$.
Assuming the statement to be true for $k-1$, let us prove it for k.
It is sufficient to prove that

$$(2k-1)a_{2k-1}a_{2k} \le \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k})^2}{4} - \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k-2})^2}{4},$$

i.e. $4(2k-1)a_{2k-1}a_{2k} \le (a_{2k-1} + a_{2k})^2 + 2(a_{2k-1} + a_{2k})(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k-2})$.
We have $(a_{2k-1} + a_{2k})^2 \ge 4a_{2k-1}a_{2k}$, with equality if $a_{2k-1} = a_{2k}$, and $a_{2k-1}a_{2k} \le a_ia_j$ for all $i \in \{2k-1, 2k\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, a_{2k-2}\}$ (due to the inequalities $0 \le a_{2k} \le a_{2k-1} \le a_j$). Here we have equality in all these inequalities either when $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2k}$, or when $a_{2k-1} = a_{2k} = 0$.
Combining the inequalities above we obtain $4(2k-1)a_{2k-1}a_{2k} \le (a_{2k-1} + a_{2k})^2 + 2(a_{2k-1} + a_{2k})(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k-2})$.
The inequality is thus proven. In order to have equality in the inequality written for $k = n$, which is equivalent to the one in the statement because of the

condition $\sum_{i=1}^{2n} a_i = 1$, we must have equality in each of the equalities written for $k = 1, 2, \ldots, n$. We must therefore have $a_{2k-1} = a_{2k}$ for all k and, also, for every k, we must have either $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2k}$, or $a_{2k-1} = a_{2k} = 0$. We obtain the following cases of equality: $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2n} = \frac{1}{2n}$ and $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2s} = \frac{1}{2s}$, $a_{2s+1} = a_{2s+2} = \ldots = a_{2n} = 0$ where $1 \leq s \leq n-1$.

Remark: The solution above can be rewritten avoiding induction:
first, we make the inequality homogeneous: it is equivalent to

$$a_1a_2 + 3a_3a_4 + 5a_5a_6 + \ldots + (2n-1)a_{2n-1}a_{2n} \leq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n})^2}{4},$$

i.e. to $4a_1a_2 + 12a_3a_4 + 20a_5a_6 + \ldots + 4(2n-1)a_{2n-1}a_{2n} \leq (a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n})^2$. This inequality can be proven by adding the inequalities

$$4(2k-1)a_{2k-1}a_{2k} \leq a_{2k-1}^2 + a_{2k}^2 + 2a_{2k-1}\sum_{i=1}^{2k-2} a_i + 2a_{2k}\sum_{i=1}^{2k-1} a_i$$

written for $k = 1, 2, \ldots, n$. These inequalities can be proven as above.