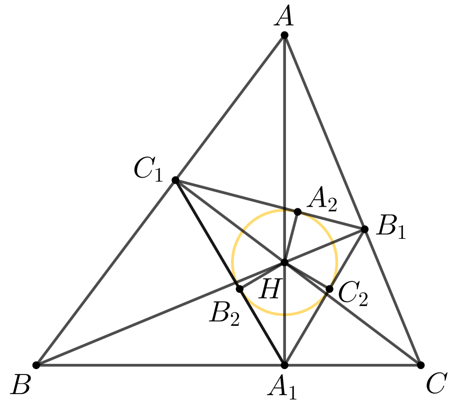
Problema săptămânii 157

Fie A_1, B_1, C_1 picioarele înălţimilor în triunghiul ascuţitunghic neechilateral ABC şi fie A_2, B_2, C_2 punctele de tangenţă ale cercului înscris în triunghiul $A_1B_1C_1$ cu laturile acestuia. Arătaţi că dreptele Euler ale triunghiurilor $A_2B_2C_2$ şi ABC coincid.

Olimpiada Balcanică de Matematică, 1990, pb 3

Soluţie: Triunghiul $A_2B_2C_1$ este isoscel, deci bisectoarea CC_1 este şi înălţime ceea ce implică $A_2B_2 \parallel AB$, ambele fiind perpendiculare pe CC_1. La fel se demonstrează că celelalte două laturi ale triunghiului $A_2B_2C_2$ sunt respectiv paralele cu laturile corespunzătoare ale triunghiului ABC. Evident, triunghiurile ABC şi $A_2B_2C_2$ nu sunt congruente, deci ele sunt omotetice, având laturile respectiv paralele. Rezultă că dreptele lui *Euler* ale celor două triunghiuri sunt paralele sau coincid. Deoarece ele au un punct comun, şi anume ortocentrul H al triunghiului ABC (care este centrul cercului circumscris tringhiului $A_2B_2C_2$), de unde rezultă că ele coincid.



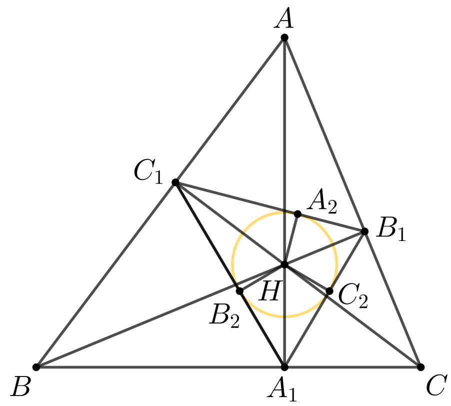
A se vedea şi problema săptămânii 92 pentru un rezultat mai puternic.

Problem of the week no. 157

Let ABC be an acute triangle and let A_1, B_1, C_1 be the feet of its altitudes. The incircle of the triangle $A_1B_1C_1$ touches its sides at the points A_2, B_2, C_2. Prove that the Euler lines of triangles ABC and $A_2B_2C_2$ coincide.

Balkan Mathematical Olympiad, 1990, pb 3

Solution: Triangle $A_2B_2C_1$ is isosceles, therefore the angle bisector CC_1 is also the altitude, which means that $A_2B_2 \parallel AB$, both being perpendicular to CC_1. One proves similarly that the other sids of triangle $A_2B_2C_2$ are parallel to those of triangle ABC. Clearly, triangles ABC and $A_2B_2C_2$ are not equal, which makes them homothetic. It follows that the *Euler* lines of the two triangles are also homothetic, i.e. they are either parallel or coincide. But they do have a common points, namely H, the orthocenter of triangles ABC, which is also the circumcircle of triangle $A_2B_2C_2$, therefore the two lines coincide.



For a stronger result, see problem of the week no. 92.

Some solutions can be found on AoPS.