Problema săptămânii 156
Doi hoţi fură un lanţ (neînchis) format din $2k$ mărgele albe şi $2m$ mărgele negre. Ei vor să împartă prada în mod egal, tăind lanţul în bucăţi astfel încât fiecare să poată lua k mărgele albe şi m mărgele negre. Care este numărul minim de tăieturi care este întotdeauna suficient?

Olimpiadă Israel, 1995-6, pb 3

Răspuns: 2
Soluţie: Evident, o tăiere nu ajunge întotdeauna: fiecare ar trebui să primească $m + k$ mărgele, deci tăierea ar trebui făcută la mijloc, dar nu întotdeauna această tăi ere va înjumătăţi numărul perlelor albe. Însă două tăieri sunt suficiente. Numerotăm mărgelele, în ordine, de la 1 la $2m + 2k$. Vom tăia după a mărgele şi după $m + k + a$ mărgele, cu $a \in \{1, \ldots, m + k\}$ convenabil ales, unul dintre hoţi luând bucata din mijloc, celălalt cele două bucăţi de la margine. Să arătăm că există o alegere convenabilă a lui a. Fie $N(a)$ numărul de mărgele albe aflate printre mărgele cu numerele $a + 1\, a + 2, \ldots, m + k + a$. Dacă $N(0) = N(m + k)$ $(= k)$, atunci o tăiere, la mijloc, ajunge. Dacă nu, putem presupune $N(0) < N(m + k)$. Cum $N(j + 1) - N(j) \in \{-1, 0, 1\}$, $\forall\, j \in \overline{0, m + k}$, şirul $N(j)$ nu sare peste nicio valoare întreagă deci, în drumul său de la $N(1)$ la $N(k + m)$ trebuie să ia orice valoare întreagă intermediară, deci şi pe k. Dacă $N(a) = k$, tăiem înaintea mărgelei cu numărul $a+1$ şi după cea cu numărul $a+k+m$, obţinând astfel bucăţile dorite.

Problem of the week no. 156
Two thieves stole an open chain with $2k$ white beads and $2m$ black beads. They want to share the loot equally, by cutting the chain to pieces in such a way that each thief gets k white beads and m black beads. What is the minimal number of cuts that is always sufficient?

Israeli Mathematical Olympiad, 1995-6, pb 3

Solution:
The answer is two.
One cut will not always suffice, since that cut would need to be made at the middle of the chain, but then we will not always obtain a fair partition of the loot.
Now we prove that two cuts are always sufficient.
Label the beads $1, 2, \ldots, 2k + 2m$ in order, along the chain. For $x \in \{1, 2, \ldots, k + m + 1\}$, denote by $f(x)$ the number of white beads among the beads labeled with $x, x + 1, x + 2, \ldots, x + k + m - 1$. Clearly, $f(1) + f(k + m + 1) = 2k$, and $f(x + 1) - f(x) \in \{-1, 0, 1\}$ for all x. Indeed, $f(x + 1) - f(x) = 1$ if bead no. $x + k + m$ is white and bead no. x is black, $f(x + 1) - f(x) = -1$ if bead no. $x+k+m$ is black and bead no. x is white, and, finally, $f(x+1)-f(x) = 0$ if beads $x+k+m$ and x have the same color. If $f(1) = k$, we can cut the chain at its middle. If $f(1) \neq k$, then either $f(1) < k < f(k + m + 1)$, or $f(1) > k > f(k + m + 1)$. In both cases, as f takes all the values between $f(1)$ and $f(k + m + 1)$, it will, at some point, take the value k. If $f(x) = k$, cut the chain before bead number x and after beed number $x + k + m$. Give the piece in the middle to one thief and the other two pieces to the other thief.