

Problema 1. Notăm cu $S(x)$ suma cifrelor reprezentării zecimale a numărului întreg pozitiv x . Pentru k un întreg pozitiv fixat, definim șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = S(kx_n)$ pentru toți n întregi pozitivi. Demonstrați că $x_n < 27\sqrt{k}$ pentru toți n întregi pozitivi.

Problema 2. Hexagonul convex $ABCDEF$ este înscris într-un cerc. Arătați că dacă

$$AB \cdot CF = 2BC \cdot FA, \quad CD \cdot EB = 2BE \cdot BC \quad \text{și} \quad EF \cdot AD = 2FA \cdot DE,$$

atunci dreptele AD , BE și CF sunt concurente.

Bulgaria, BMO2009 ShortList

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater convex, și P un punct în interiorul său, astfel încât proiecțiile punctului P pe laturile patrulaterului sunt situate pe un cerc de centru O . Demonstrați că punctul O este situat pe dreapta care unește mijloacele diagonalelor AC și BD .

Bulgaria, BMO2009 ShortList