BARAJ DE JUNIORI ,,Euclid”
Cipru, 9 februarie 2013 (barajul 1)

Problema 1. Dacă a, b, c sunt numere raţionale astfel încât $a \neq b \neq c \neq a$, demonstraţi că numărul

$$A = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$$

este pătratul unui număr raţional.

Problema 2. 2013 numere reale sunt scrise într-un şir. Dacă a, b, c sunt trei termeni consecutivi ai şirului, atunci $b = \frac{2ac}{a+c}$. Primul număr este $\frac{1}{10}$, iar ultimul $\frac{1}{603}$. Aflaţi cel de-al 1001-lea număr din şir.

Problema 3. Se dă un triunghi ABC cu $m(\varepsilon BAC) = 60^\circ$. Ducem bisectoarele $[BD]$ şi $[CE]$. Arătaţi că $BE + CD = BC$.

Problema 4. Fie a, b, n numere naturale nenule şi $A = n^a + 1$, $B = n^b + 1$. Arătaţi că numărul A este divizibil cu numărul B dacă şi numai dacă există un număr <u>natural impar</u> k astfel încât $a = kb$.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii oficiale:

Problema 1. Dacă a, b, c sunt numere raţionale astfel încât $a \neq b \neq c \neq a$, demonstraţi că numărul

$$A = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$$

este pătratul unui număr raţional.

Soluţie:

$$A = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{b-c} + \frac{1}{b-c}\cdot\frac{1}{c-a} + \frac{1}{c-a}\cdot\frac{1}{a-b}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 - 2\cdot\frac{c-a+a-b-c}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2.$$

Problema 2. 2013 numere reale sunt scrise într-un şir. Dacă a, b, c sunt trei termeni consecutivi ai şirului, atunci $b = \frac{2ac}{a+c}$. Primul număr este $\frac{1}{10}$, iar ultimul $\frac{1}{603}$. Aflaţi cel de-al 1001-lea număr din şir.

Soluţie:

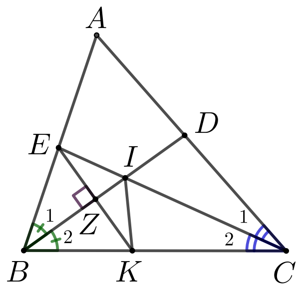
$$b = \frac{2ac}{a+c} \Leftrightarrow \frac{2}{b} = \frac{a+c}{ac} \Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$$

Ultima relaţie arată că inversele celor trei numere consecutive din şir diferă printr-un număr fix[1]. Să îl notăm cu r. Atunci inversul ultimului numnăr, care este $\frac{1}{\frac{1}{603}} = 603$ se obţine adăugând la inversului primului număr, care este $\frac{1}{\frac{1}{10}} = 10$ numărul $2012r$. Aşadar $10 + 2012r = 603 \Leftrightarrow r = \frac{593}{2012}$. Prin urmare, inversul celui de-al 1001-lea număr este $10 + 1000r = 10 + 1000 \cdot \frac{593}{2012} = \frac{153280}{503}$. În cele din urmă, cel de-al 1001-lea număr este $\frac{503}{153280}$.

Problema 3. Se dă un triunghi ABC cu $m(\varepsilon BAC) = 60°$. Ducem bisectoarele $[BD]$ şi $[CE]$. Arătaţi că $BE + CD = BC$.

[1] adică inversele formează o progresie aritmetică

Soluţie:[2] $m(\sphericalangle B_1) = m(\sphericalangle B_2) = \dfrac{m(\sphericalangle B)}{2}$, $m(\sphericalangle C_1) = m(\sphericalangle C_2) = \dfrac{m(\sphericalangle C)}{2}$
În primul rând, din triunghiul BIC, $m(\sphericalangle BIC) = 180° - m(\sphericalangle B_2) - m(\sphericalangle C_2) = 180° - \dfrac{m(\sphericalangle B_2) + m(\sphericalangle C_2)}{2} = 180° - \dfrac{180° - m(\sphericalangle A)}{2} = 90° + \dfrac{m(\sphericalangle A)}{2} = 120°$.
Ducem $EZ \perp BD$, $Z \in BD$, şi notăm $\{K\} = EZ \cap BC$. Atunci triunghiul EBK este isoscel, deci $BE = BK$ (1), de unde rezultă că triunghiul EIK este isoscel, cu $IE = IK$.
Atunci $m(\sphericalangle KIZ) = m(\sphericalangle ZIE) = 180° - m(\sphericalangle BIC) = 60°$, deci $m(\sphericalangle KIC) = 60°$.
Triunghiurile CDI şi CKI sunt congruente deoarece $[IC]$ este latură comună, $m(\sphericalangle C_1) = m(\sphericalangle C_2) = \dfrac{m(\sphericalangle C)}{2}$ şi $m(\sphericalangle CID) = m(\sphericalangle ZIE) = 60° = m(\sphericalangle CIK)$.
Rezultă că $CK = CD$ (2).
În sfârşit, din (1) şi (2) deducem $BE + CD = BK + CK = BC$.



Problema 4. Fie a, b, n numere naturale nenule şi $A = n^a + 1$, $B = n^b + 1$. Arătaţi că numărul A este divizibil cu numărul B dacă şi numai dacă există un număr natural impar k astfel încât $a = kb$.

Soluţie:
În cazul $n = 1$ condiţia $B \mid A$ are loc pentru orice numere pozitive a, b deoarece în acest caz $A = B = 2$.
Soluţia de mai jos funcţionează numai în cazurile în care $n > 1$.

Există $k \in \mathbb{N}^*$: $a = kb + m$, cu $0 \leq m < b$. Avem $A = n^a + 1 = n^{kb+m} + 1 = n^{kb} \cdot n^m + 1 = \left(n^b\right)^k \cdot n^m + 1 = (B-1)^k \cdot n^m + 1 = \mathcal{M}_B + (-1)^k \cdot n^m + 1$.
• Dacă k este par, avem $0 < (-1)^k \cdot n^m + 1 = n^m + 1 < n^b + 1 = B$, aşa că $(-1)^k \cdot n^m + 1 \neq \mathcal{M}_B$ şi prin urmare B nu îl divide pe A.
• Dacă k este impar, atunci $(-1)^k \cdot n^m + 1 = -n^m + 1 \leq 0$. (Avem şi $(-1)^k \cdot n^m + 1 > -B$.)
Atunci $B \mid A \Rightarrow (-1)^k \cdot n^m + 1 = -n^m + 1 = 0 \Rightarrow n^m = 1 \overset{n>1}{\Rightarrow} m = 0 \Rightarrow a = bk$.
Reciproc, dacă există k impar astfel încât $a = kb$, atunci $A = n^{kb} + 1 = (n^b)^k + 1 = (n^b + 1)\left((n^b)^{k-1} - (n^b)^{k-2} + \ldots + 1\right) = B \cdot C$, deci $B \mid A$.

[2] Altă soluţie: $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ (teorema cosinusului), $BE = \dfrac{ac}{a+b}$ şi $CD = \dfrac{ab}{a+c}$ (din teorema bisectoarei) şi după un scurt calcul, $BE + CD = BC \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$