Problema 1. Spunem despre un număr natural nenul n că este *bun* dacă printre divizorii săi există trei numere naturale, distincte două câte două, astfel încât suma pătratelor acestora este egală cu n.
a) Demonstraţi că orice număr bun este divizibil cu 3.
b) Arătaţi că există o infinitate de numere naturale bune.

Problema 2. Demonstraţi că, pentru orice numere reale x şi y, are loc inegalitatea

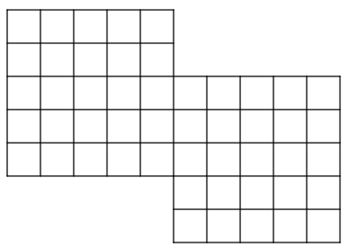
$$x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}<x^2+y^2+1.$$

Problema 3. Fie $k \in (0,1)$ un număr real. Pe laturile (AB), (BC), (CA) ale triunghiului ascuţitunghic ABC se consideră punctele M, N, respectiv P astfel încât $AM = k \cdot AB$, $BN = k \cdot BC$ şi $CP = k \cdot CA$. Arătaţi că

$$\frac{AB^2+BC^2+CA^2}{MN^2+NP^2+PM^2} \leq 4.$$

Când are loc egalitatea?

Problema 4. Figura de mai jos este formată prin lipirea a două pătrate 5×5. Care este numărul minim de segmente de lungime 1 care trebuie şterse pentru ca în figură să nu rămână niciun pătrat de latură 1?



Aceeaşi întrebare pentru figura