**Problema 1.** Helen împarte numărul 365 la fiecare din numerele $1, 2, \ldots, 365$ şi întocmeşte lista celor 365 de resturi obţinute.
Apoi Phil împarte numărul 366 la fiecare din numerele $1, 2, \ldots, 366$ şi întocmeşte lista celor 366 de resturi obţinute.
Care din cei doi are suma resturilor de pe lista sa mai mare şi cu cât?

*Olimpiadă Marea Britanie,* 2017-2018

**Problema 2.** Fie $n \geq 3$ un număr întreg. Demonstraţi că este posibil ca, eliminând cel mult două dintre elementele mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, să obţinem o mulţime care are suma elementelor pătrat perfect.

*Mihail Bălună*

**Problema 3.** a) Fie $P_{AB}$, $P_{BC}$, $P_{CD}$ şi $P_{DA}$ puncte pe muchiile $(AB)$, $(BC)$, $(CD)$, respectiv $(DA)$ ale unui tetraedru $ABCD$.
Arătaţi că planele $(P_{AB}CD)$, $(P_{BC}DA)$, $(P_{CD}AB)$ şi $(P_{DA}BC)$ au un punct comun dacă şi numai dacă are loc relaţia

$$\frac{AP_{AB}}{P_{AB}B} \cdot \frac{BP_{BC}}{P_{BC}C} \cdot \frac{CP_{CD}}{P_{CD}D} \cdot \frac{DP_{DA}}{P_{DA}A} = 1.$$

(*Teorema lui Ceva în spaţiu*)

b) Fie $P_{AB}$, $P_{BC}$, $P_{CD}$, $P_{DA}$, $P_{AC}$ şi $P_{BD}$ puncte pe muchiile $(AB)$, $(BC)$, $(CD)$, $(DA)$, $(AC)$, respectiv $(BD)$ ale unui tetraedru $ABCD$ cu proprietatea că există punctele $\{A'\} = BP_{CD} \cap CP_{BD} \cap DP_{BC}$, $\{B'\} = AP_{CD} \cap CP_{DA} \cap DP_{AC}$,
$\{C'\} = AP_{BD} \cap BP_{DA} \cap DP_{AB}$ şi $\{D'\} = AP_{BC} \cap BP_{AC} \cap CP_{AB}$.
Demonstraţi că dreptele $AA'$, $BB'$, $CC'$ şi $DD'$ sunt concurente.

**Problema 4.** În căsuţele unui pătrat $10 \times 10$ se scriu numerele $1, 2, 3, \ldots, 100$ astfel încât oricare două numere consecutive să se afle în căsuţe vecine.[1] Demonstraţi că există o linie sau o coloană care conţine cel puţin două pătrate perfecte.

*Adrian Zahariuc*

[1] Două căsuţe sunt vecine dacă au o latură comună.