Problema 1. Pentru două numere naturale m şi n, arătaţi că numărul $5^m + 5^n$ se scrie ca sumă de două pătrate perfecte dacă şi numai dacă $m - n$ este par.

Vasile Zidaru, Olimpiada Naţională de Matematică, 2003

Soluţie:
• Arătăm mai întâi că dacă numărul $5^m + 5^n$ se scrie ca sumă de două pătrate perfecte atunci m şi n au aceeaşi paritate.
Presupunând contrariul, anume că unul dintre numere este par iar celălalt impar, am obţine un număr de forma $5^{2k} + 5^{2j+1}$ care s-ar scrie ca sumă de două pătrate. Evident, acest număr fiind par, el s-ar scrie fie ca suma pătratelor a două numere pare, fie ca suma pătratelor a două numere impare. În primul caz suma ar fi un multiplu de 4. În cazul al doilea, deoarece pătratul unui număr impar, $2m + 1$, este $4m(m + 1) + 1$, adică un număr care dă rest 1 la împărţirea cu 8 (numărul $m(m + 1)$ este mereu par), s-ar obţine un număr care dă restul 2 la împărţirea cu 8. Prin urmare, dacă o sumă de două pătrate este un număr par, acesta poate da unul din resturile 0, 2 sau 4 la împărţirea cu 8.
Dar $5^{2k} = 25^k = (24 + 1)^k = (M_8 + 1)^k = M_8 + 1^k = M_8 + 1$, iar $5^{2j+1} = 5 \cdot 25^j = 5 \cdot (24 + 1)^j = 5(M_8 + 1) = M_8 + 5$, prin urmare $5^{2k} + 5^{2j+1} = M_8 + 6$, ceea ce contrazice presupunerea făcută.

• Arătăm acum că dacă m şi n au aceeaşi paritate, atunci $5^m + 5^n$ se scrie ca o sumă de două pătrate perfecte.
Dacă m şi n sunt pare, atunci 5^m şi 5^n sunt pătrate perfecte, deci concluzia este evidentă.
Dacă m şi n sunt impare, $m = 2a + 1$, $n = 2b + 1$ cu $a, b \in \mathbb{N}$, atunci $5^m + 5^n = 5(5^{2a} + 5^{2b}) = (1 + 4)(5^{2a} + 5^{2b}) = (5^{2a} + 4 \cdot 5^a \cdot 5^b + 4 \cdot 5^{2b}) + (4 \cdot 5^{2a} - 4 \cdot 5^a \cdot 5^b + 5^{2b}) = (5^a + 2 \cdot 5^b)^2 + (2 \cdot 5^a - 5^b)^2$, deci $5^m + 5^n$ se scrie ca o sumă de două pătrate, anume cele ale numerelor naturale $5^a + 2 \cdot 5^b$ şi $|2 \cdot 5^a - 5^b|$.

Remarcă:
Scrierea ca sumă de pătrate rezultă dintr-o identitate cunoscută, *identitatea lui Lagrange*:
$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Problema 2. Fie a, b, c trei numere naturale astfel încât $a^2 + b = c^2 + c$. Demonstraţi că $a \leq b$.

Soluţie:
Presupunem, prin absurd, că numerele naturale a, b, c satisfac $a^2 + b = c^2 + c$ şi $a > b$.
Atunci $c^2 + c = a^2 + b < a^2 + a$. Dacă am avea $a \leq c$, ar rezulta $a^2 \leq c^2$ şi apoi $a^2 + a \leq c^2 + c$, ceea ce ar contrazice $c^2 + c < a^2 + a$. Aşadar, trebuie ca $a > c$, adică $a \geq c + 1$. Dar atunci $a^2 + b \geq (c + 1)^2 + 0 = c^2 + 2c + 1 > c^2 + c$, ceea ce

contrazice egalitatea $a^2 + b = c^2 + c$.
Astfel, am ajuns la o contradicţie, ceea ce arată că presupunerea de la care am pornit este falsă, deci că $a \leq b$.

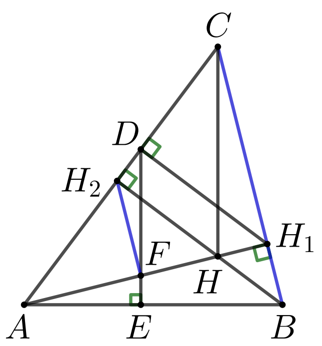
Problema 3. Fie AH_1 şi BH_2 două dintre înalţimile triunghiului ascuţitunghic ABC, D proiecţia lui H_1 pe AC, E proiecţia lui D pe AB şi F intersecţia dreptelor DE şi AH_1. Demonstraţi că $H_2F \parallel BC$.

Concursul Sharygin, 2016

Soluţie:
Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Din teorema lui Thales rezultă că

$$\frac{AF}{AH_1} = \frac{AF}{AH} \cdot \frac{AH}{AH_1} = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AH_2}{AD} = \frac{AH_2}{AC}.$$

Din reciproca teoremei lui Thales rezultă acum concluzia.



Problema 4. Arătaţi că, oricum am alege 20 numere din mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$, putem găsi printre acestea două al căror produs este pătrat perfect.

Dorin Mărghidanu

Soluţie:
Grupăm numerele formând submulţimile: $M_1 = \{1, 4, 9, 16, 25\}$, $M_2 = \{2, 8, 18\}$, $M_3 = \{3, 12, 27\}$, $M_4 = \{5, 20\}$, $M_5 = \{6, 24\}$, $M_6 = \{7, 28\}$, $M_7 = \{10\}$, $M_8 = \{11\}$, $M_9 = \{13\}$, $M_{10} = \{14\}$, $M_{11} = \{15\}$, $M_{12} = \{17\}$, $M_{13} = \{19\}$, $M_{14} = \{21\}$, $M_{15} = \{22\}$, $M_{16} = \{23\}$, $M_{17} = \{26\}$, $M_{18} = \{29\}$, $M_{19} = \{30\}$.
Conform principiului cutiei, fiind doar 19 mulţimi, două dintre cele 20 de numere alese se vor regăsi într-o aceeaşi submulţime. Produsul acestora două este pătrat perfect.