Problema 1. Determinaţi toate numerele naturale n care au cel puţin patru divizori naturali şi care sunt egale cu suma pătratelor celor mai mici patru divizori naturali ai lor.

Olimpiadă Iran, 1999

Soluţie:
Fie n un număr cu proprietatea din enunţ şi $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ cei mai mici patru divizori naturali ai săi. Dacă n este impar, d_1, d_2, d_3, d_4 sunt impare, deci $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ este par, contradicţie. Aşadar $d_2 = 2$. Deoarece un pătrat perfect dă restul 0 sau 1 la împărţirea cu 4, dacă $4 \mid n$ atunci $d_3 = 4$ sau $d_3 = 3$ şi $d_4 = 4$ dar în niciunul din cazuri nu obţinem $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ divizibil cu 4. Rezultă că 4 nu divide n. Atunci cei mai mici patru divizori ai săi sunt fie $1, 2, p, q$ unde p, q sunt două numere prime distincte, fie $1, 2, p, 2p$. În primul caz $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ este impar, ceea ce nu convine. Rămâne cazul al doilea, în care $n = 1+4+p^2+4p^2 = 5(1+p^2)$, deci $5 \mid p$. Deducem că $d_3 \in \{3, 5\}$. În primul caz, $n = 1 + 2^2 + 3^2 + 6^2$ nu este divizibil cu 3, deci acest caz nu convine. Dacă $d_3 = 5$, atunci $n = 1 + 2^2 + 5^2 + 10^2 = 130$ ai cărui cei mai mici patru divizori naturali sunt într-adevăr 1, 2, 5 şi 10.

Problema 2. Demonstraţi că, pentru orice numere reale x, y, z şi orice numere pozitive a, b, c, are loc dubla inegalitate

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{(2x+y)^2}{2a+b} + \frac{(2y+z)^2}{2b+c} + \frac{(2z+x)^2}{2c+a}\right) \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}.$$

Când au loc egalităţile în cele două inegalităţi?

Soluţie:
Conform inegalităţii din materialul teoretic, avem $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} \geq \dfrac{(2x+y)^2}{2a+b}$, $\dfrac{y^2}{b} + \dfrac{y^2}{b} + \dfrac{z^2}{c} \geq \dfrac{(2y+z)^2}{2b+c}$ şi $\dfrac{z^2}{c} + \dfrac{z^2}{c} + \dfrac{x^2}{a} \geq \dfrac{(2z+x)^2}{2c+a}$. Adunându-le şi împărţind cu 3 obţinem inegalitatea din stânga.
Egalitatea are loc atunci când $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$.

Tot conform inegalităţii prezentate în materialul teoretic,

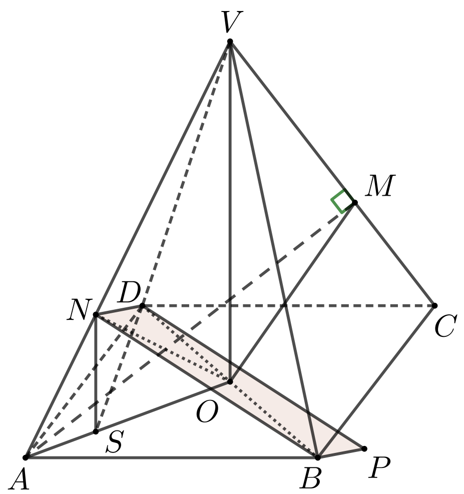
$$\frac{(2x+y)^2}{2a+b} + \frac{(2y+z)^2}{2b+c} + \frac{(2z+x)^2}{2c+a} \geq \frac{\left((2x+y)+(2y+z)+(2z+x)\right)^2}{(2a+b)+(2b+c)+(2c+a)} = \frac{9(x+y+z)^2}{3(a+b+c)},$$

de unde, împărţind cu 3, obţinem inegalitatea din dreapta.
Egalitate avem dacă $\dfrac{2x+y}{2a+b} = \dfrac{2y+z}{2b+c} = \dfrac{2z+x}{2c+a}$.
Dacă notăm cu k valoarea comună a acestor fracţii, avem $2x + y = k(2a + b)$,

$2y+z=k(2b+c)$, $2z+x=k(2c+a)$ care, adunate, implică $3(x+y+z)=3k(a+b+c)$, adică $x+y+z=k(a+b+c)$. Scăzând prima egalitate din ultima obţinută, avem $z-x=k(c-a)$. Aceasta, adunată cu $2z+x=k(2c+a)$ implică $z=kc$. Analog se obţine că $x=ka$ şi $y=kb$, adică egalitatea are loc dacă $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Problema 3. Se consideră piramida regulată $VABCD$ cu vârful în V, în care măsura unghiului format de două muchii laterale opuse este de $45°$. Punctele M, N şi P sunt respectiv: proiecţia punctului A pe dreapta VC, simetricul punctului M în raport cu planul (VBD) şi simetricul punctului N în raport cu centrul, O, al bazei piramidei.
a) Arătaţi că poliedrul $MDNBP$ este piramidă regulată.
b) Determinaţi măsura unghiului dintre dreapta DN şi planul (ABC).

Mircea Fianu, Olimpiada Judeţeană de Matematică, 2002



Soluţie: (preluată din *Gazeta Matematică*)
a) Deoarece simetricul segmentului $[CV]$ faţă de planul (VBD) este segmentul $[AV]$, deducem că $N\in AV$ şi $VN=VM$. În plus, $OM=ON$.
În triunghiul dreptunghic AMC, $[MO]$ este mediană, de unde $MO=AO=CO$ şi apoi

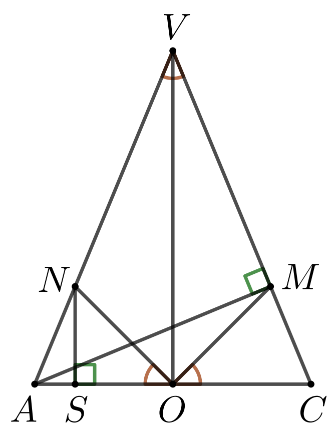
$$NO=OB. \qquad (1)$$

Triunghiul OMC este isoscel, deci $\Delta MOC\sim\Delta AVC \Rightarrow m(\widehat{MOC})=m(\widehat{AVC})=45°$, conform ipotezei.

Deducem că $m(\widehat{NOA}) = 45°$ şi $m(\widehat{NOM}) = 90°$, adică

$$MO \perp NO. \qquad (2)$$

Conform ipotezei, segmentul $[NP]$ are mijlocul O, ca şi $[BD]$; rezultă că $NBPD$ este paralelogram.
Cum $BD \perp (VAC)$, rezultă $BD \perp NO$ şi, utilizând (1), obţinem că $NBPD$ este pătrat. Mai mult, $BD \perp MO$ şi din (2) rezultă că $MO \perp (NBPD)$, adică $MNBPD$ este piramidă regulată.
b) Fie S proiecţia punctului N pe planul bazei $(ABCD)$; $S \in AO$. Deoarece $m(\widehat{NOA}) = 45°$, rezultă că ΔNSO este dreptunghic isoscel, de unde $NS = \dfrac{NO}{\sqrt{2}}$.
Pe de altă parte, $NO = OD$ şi $NO \perp OD$, deci $ND = NO\sqrt{2}$.
Atunci $\sin(\widehat{NDS}) = \dfrac{NS}{ND} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}NO}{\sqrt{2}\,NO} = \dfrac{1}{2}$, deci $m(\widehat{NDS}) = 30°$.
Deoarece unghiul format de dreapta ND şi planul (ABC) este $\widehat{NDS}$, problema este rezolvată: măsura unghiului cerut este de $30°$.



Problema 4. Numerele naturale de la 1 la n sunt scrise pe câte un cartonaş. Cartonaşele se află pe o masă, cu faţa în sus. Ana şi Bogdan joacă următorul joc: mai întâi Ana ia unul din cartonaşele de pe masă. Apoi, Bogdan ia de pe masă două cartonaşe pe care sunt scrise două numere consecutive. Urmează Ana care ia de pe masă trei cartonaşe pe care sunt scrise trei numere consecutive. În fine, Bogdan ia de pe masă patru cartonaşe pe care sunt scrise patru numere consecutive. Care este cea mai mică valoare a numărului natural n pentru care Bogdan îşi poate asigura efectuarea ambelor sale mutări?

Concursul Baltic Way, 2018

Soluţie:
Răspunsul este $n = 14$.
Mai întâi, să demonstrăm că dacă $n \leq 13$, Ana îl poate împiedica pe Bogdan să efectueze cea de-a doua sa mutare. Dacă $n < 10$ este evident că nu se pot lua $1+2+3+4 = 10$ cartonaşe de pe masă. Dacă $n \geq 10$, Ana ia mai întâi cartonaşul cu numărul 4.
Dacă $n = 10$ sau $n = 11$, la a doua ei mutare, Ana face în aşa fel încât numărul 8 să fie luat. Dacă l-a luat Bogdan, el nu mai are o a doua mutare. Dacă nu l-a luat, Ana poate lua 6, 7, 8 sau 8, 9, 10.
Dacă $n = 12$, la a doua ei mutare, Ana face în aşa fel încât numerele 8 şi 9 să fie luate. Dacă le-a luat Bogdan pe amândouă, el nu mai are o a doua mutare. Dacă Bogdan a luat 7, 8, Ana ia 9, 10, 11, iar dacă Bogdan a luat 9, 10, Ana ia 6, 7, 8. Dacă Bogdan a lăsat numerele 8, 9 pe masă, Ana poate lua 7, 8, 9 sau 8, 9, 10. Oricum ar fi, lui Bogdan nu îi rămân patru numere consecutive pe masă.
Dacă $n = 13$, la a doua ei mutare, Ana face în aşa fel încât numerele 8, 9 şi 10 să fie luate. Dacă Bogdan a luat zero, una sau două dintre ele, Ana le ia pe cele rămase (dacă Bogdan a luat 9, 10, ea poate lua 11, 12, 13), iar lui Bogdan nu îi rămân patru numere consecutive pe masă.

Să arătăm acum că, dacă $n = 14$, Bogdan îşi poate asigura efectuarea ambelor sale mutări. El foloseşte următoarea strategie. Fie k numărul şters de Ana la prima ei mutare. Datorită simetriei, putem presupune $k \leq 7$. Dacă $k \geq 5$, Bogdan şterge 13 şi 14 şi vor rămâne două intervale de lungime 4: de la 1 la 4 şi de la 9 la 12. Ana nu le poate strica pe amândouă, iar Bogdan va putea lua numerele de la 1 la 4 sau pe cele de la 9 la 12.
Dacă însă $k \leq 4$, Bogdan poate şterge, de exemplu, 9 şi 10 rămânând cu două intervale de lungime 4: de la 5 la 8 şi de la 11 la 14. Din nou, Ana nu le poate strica pe amândouă; Bogdan va putea muta în intervalul lăsat de Ana.