Problema 1. Fie S mulţimea numerelor mai mari ca 10 care au numai cifre din mulţimea $\{1, 3, 7, 9\}$. (Cifrele se pot şi repeta.) Arătaţi că orice element al lui S are un factor prim mai mare ca 10.

Olimpiada Iberoamericană, 1999

Soluţie:
Evident, niciun număr din S nu este divizibil nici cu 2, nici cu 5. Să demonstrăm că nu este posibil ca singurii factori primi ai unui număr din S să fie 3 şi/sau 7. Atunci va rezulta că orice număr din S are un factor prim mai mare ca 10.
Observaţia esenţială este că orice număr de forma $3^k \cdot 7^j$, $k, j \in \mathbb{N}$, are penultima cifră pară, deci nu aparţine lui S. Afirmaţia precedentă revine la a arăta că numerele de forma $3^k \cdot 7^j$ dau unul din resturile $1, 3, 7, 9$ la împărţirea cu 20. Să observăm că dacă înmulţim două numere de forma $20k + r$ cu $r \in \{1, 3, 7, 9\}$, obţinem tot un număr de această formă. Într-adevăr, $(20k_1 + r_1)(20k_2 + r_2) = 400k_1k_2 + 20k_1r_2 + 20k_2r_1 + r_1r_2 = 20(20k_1k_2 + k_1r_2 + k_2r_1) + r_1r_2$. Ne convingem uşor că produsul oricărora două dintre numerele $1, 3, 7, 9$, nu neapărat diferite, are penultima cifră pară (sau inexistentă), adică este un număr de forma $20k + r$, cu $r \in \{1, 3, 7, 9\}$. Cu aceasta, afirmaţia este probată.

Problema 2. Determinaţi valorile numărului natural $n \geq 2$ pentru care există numere întregi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel încât să aibă loc simultan relaţiile:

$$x_1^2 + x_2^2 + 50 = 16x_1 + 12x_2,\ \ x_2^2 + x_3^2 + 50 = 16x_2 + 12x_3,\ \ldots,$$
$$x_{n-1}^2 + x_n^2 + 50 = 16x_{n-1} + 12x_n \ \text{ şi } \ x_n^2 + x_1^2 + 50 = 16x_n + 12x_1.$$

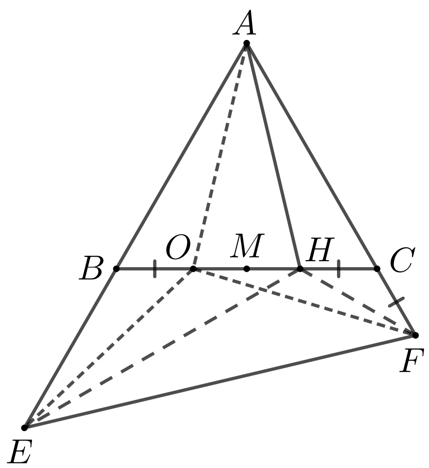
Olimpiadă Polonia, 1999

Soluţie: Rescriem ecuaţia $x^2+y^2+50 = 16x+12y$ sub forma $(x-8)^2+(y-6)^2 = 50$. Singurele soluţii întregi ale acesteia sunt $(7, -1)$, $(7, 13)$, $(9, -1)$, $(9, 13)$, $(3, 1)$, $(3, 11)$, $(13, 1)$, $(13, 11)$, $(1, 5)$, $(1, 7)$, $(15, 5)$ şi $(15, 7)$. Astfel, fiecare pereche (x_i, x_{i+1}) (unde $x_{n+1} = x_1$) trebuie să fie una dintre cele de mai sus. Asta înseamnă că x_i trebuie să fie un număr care apare atât pe post de primă componentă a unei perechi, cât şi pe post de cea de-a doua componentă a unei perechi. Aşadar $x_i \in \{1, 7, 13\}$. În plus, se vede că dacă, de exemplu, $x_i = 1$, atunci trebuie ca $x_{i+1} = 7$, $x_{i+2} = 13$, $x_{i+3} = 1$ ş.a.m.d., adică numerele trebuie să se repete din trei în trei. Acest lucru este posibil numai dacă n este divizibil cu 3. Aşadar, este necesar ca n să fie multiplu de 3.
Pe de altă parte, dacă n este multiplu de 3, există numere care să satisfacă relaţiile date, de exemplu numerele $x_{3k} = 1$, $x_{3k+1} = 7$, $x_{3k+2} = 13$, $\forall i$, deci condiţia ca n să fie multiplu de 3 este şi suficientă.
În concluzie, răspunsul este: orice $n \in \mathbb{N}^*$ multiplu de 3.

Problema 3. Fie ABC un triunghi echilateral şi H un punct arbitrar al segmentului (BC), diferit de mijlocul acestuia. Notăm cu E acel punct al semidreptei $[AB$ care satisface condiţiile $BE = BH$, $B \in (AE)$ şi cu F acel punct al semidreptei $[AC$ care satisface condiţiile $CF = CH$, $C \in (AF)$. Arătaţi că dreapta BC este dreapta lui Euler a triunghiului AEF.

Mihai Miculiţa

Soluţie:
Fie M mijlocul lui (BC) şi O simetricul lui H faţă de M. Vom demonstra că H este ortocentrul, iar O centrul cercului circumscris triunghiului AEF. Va rezulta că dreapta HO, adică BC, este dreapta lui Euler a triunghiului AEF.
• H este ortocentrul ΔAEF.
Triunghiurile BEH şi CFH sunt isoscele, cu măsura unghiului din vârf de $120°$, deci $m(\sphericalangle BEH = 30°)$, ceea ce implică $EH \perp AF$ şi analog $FH \perp AE$, deci H este ortocentrul $\Delta\, AEF$.
• O este centrul cercului circumscris ΔAEF.
Avem $EB = EH = CO$ şi $BO = CH = CF$, deci triunghiurile EBO şi OCF sunt congruente (L.U.L.), prin urmare $OE = OF$, adică punctul O se găseşte pe mediatoarea laturii $[EF]$. Dacă notăm cu O' centrul cercului circumscris triunghiului AEF, se ştie că $m(\sphericalangle EAO') = m(\sphericalangle FAH) = 90° - m(\sphericalangle AFE)$ (într-un triunghi, semidreptele $(AH$ şi $(AO'$ sunt izogonale faţă de laturile triunghiului). Dar şi $\sphericalangle EAO \equiv \sphericalangle FAH$ (din construcţie, triunghiurile ABO şi ACH fiind congruente). Aşadar, O' aparţine atât semidreptei $(AO$ cât şi mediatoarei lui $[EF]$. Cum AO nu este perpendiculară pe EF, aceste două drepte se intersectează într-un singur punct. Ori punctul O se află pe ambele drepte, deci $O' = O$.



Problema 4. La o petrecere, un participant este numit „*timid*" dacă el sau ea cunoaşte cel mult trei dintre ceilalţi participanţi. Arătaţi că dacă fiecare participant cunoaşte cel puţin trei timizi, atunci toţi participanţii sunt timizi. Ce valori posibile poate lua numărul participanţilor la această petrecere? (Se consideră că dacă un participant A îl cunoaşte pe B, atunci şi B îl cunoaşte pe A.)

Concursul KöMaL, 1998

Soluţie:
Fiecare timid cunoaşte exact 3 timizi şi niciun netimid. Aşadar, timizii nu cunosc netimizi, prin urmare nu există netimizi. Sunt cel puţin 4 timizi. Fie n numărul participanţilor la petrecere. Fiecare timid cunoaşte 3, deci sunt $3n$ cunoştinţe; dar ele sunt reciproce deci fiecare este numărată de două ori. Rezultă că $3n$ trebuie să fie număr par, adică n trebuie să fie par.
Reciproc, pentru orice $n \geq 4$ par, există astfel de petreceri: îi dispunem pe participanţi pe un cerc, în vârfurile unui poligon regulat cu n laturi şi spunem că fiecare participant îşi cunoaşte vecinii şi diametral opusul. (Diametral opusul este tot un vârf al poligonului regulat deoarece acesta are un număr par de laturi.)