Problema 1. Determinaţi numerele naturale nenule x şi y pentru care

$$x^{x+y} = y^{y-x}.$$

Concurs Austria-Polonia, 1999

Soluţie:
Fie $d = (x, y)$ şi $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x = ad$, $y = bd$ şi $(a, b) = 1$. Atunci ecuaţia din enunţ se scrie succesiv: $(ad)^{(a+b)d} = (bd)^{(b-a)d}$, $(ad)^{a+b} = (bd)^{b-a}$, $a^{a+b}d^{2a} = b^{b-a}$. De aici rezultă că a divide b^{b-a}. Cum $(a, b) = 1$, deducem că $a = 1$. În acest caz, ecuaţia devine $b^{b-1} = d^2$, deci b este fie impar, fie pătrat perfect.
Dacă $b = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $d = (2k+1)^k$, deci $x = (2k+1)^k$ şi $y = (2k+1)^{k+1}$.
Dacă $b = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $d = n^{n^2-1}$, deci $x = n^{n^2-1}$, $y = n^{n^2+1}$.

Problema 2. Arătaţi că $[x] + [nx] = [(n+1)x]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ dacă şi numai dacă $x \in \mathbb{Z}$.

Andrei Eckstein

Soluţie:
Dacă x este număr întreg, atunci, pentru orice număr natural n, avem în mod evident $[(n+1)x] = (n+1)x = x + nx = [x] + [nx]$.
Reciproc, să presupunem că numărul x are proprietatea că $[x] + [nx] = [(n+1)x]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Dacă notăm cu $N = [x]$ şi cu $y = \{x\}$, atunci condiţia precedentă revine la $[N+y]+[n(N+y)] = [(n+1)(N+y)]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, adică, folosind că $[k+x] = k+[x]$ pentru orice k întreg, obţinem că $N + [y] + nN + [ny] = (n+1)N + [(n+1)y]$, adică $[ny] = [(n+1)y]$ pentru orice n natural. (Am folosit că $y = \{x\} \in [0, 1)$ implică $[y] = 0$.) Scriind egalitatea precedentă pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$, obţinem $0 = [y] = [2y] = [3y] = \ldots = [my]$ pentru orice m natural, adică $my < 1$ pentru orice m natural. Dacă $y \neq 0$, de aici ar rezulta că toate numerele naturale sunt mai mici decât $\dfrac{1}{y}$, ceea ce este absurd.
Rămâne că $y = 0$, adică x este număr întreg.

Problema 3. Punctele K, L, M şi N se află pe laturile (AB), (BC), (CD) şi (DA) ale unui pătrat $ABCD$ şi sunt la rândul lor vârfurile unui pătrat. Dreptele DK şi NM se intersectează în punctul E, iar dreptele CK şi LM se intersectează în punctul F. Demonstraţi că dreptele EF şi AB sunt paralele.

Concursul Sharigin, 2014

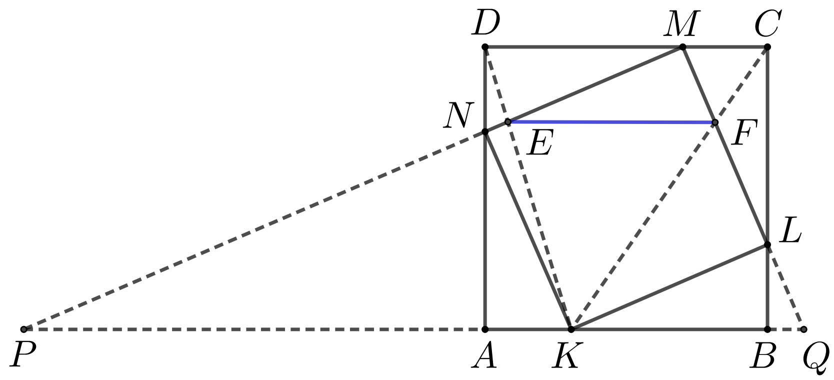
Soluţie:
Fie P şi Q punctele în care dreptele MN şi LM intersectează dreapta AB. Triunghiurile AKN, BLK, CML şi DMN sunt congruente (ipotenuză-unghi). Fie $AK = a$ şi $BK = b$. Atunci $BL = CM = DN = a$ şi $CL = MD = NA = b$. Triunghiurile PKN şi QLK sunt dreptunghice, deci, din teorema înălţimii, $PA \cdot a = b^2$ şi $BQ \cdot b = a^2$.
Asemănarea triunghiurilor PEK şi MED implică

$$\frac{KE}{DE} = \frac{PK}{MD} = \frac{PA + AK}{MD} = \frac{a + \frac{b^2}{a}}{b} = \frac{a^2 + b^2}{ab},$$

iar asemănarea triunghiurilor QFK şi MFC implică

$$\frac{FK}{CF} = \frac{QK}{MC} = \frac{QB + BK}{MC} = \frac{b + \frac{a^2}{b}}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

Astfel, $\frac{KE}{DE} = \frac{FK}{CF}$, ceea ce arată că $EF \parallel AB$, c.c.t.d.



Problema 4. Dispunem de cinci vase de capacitate 15 litri fiecare. Aceste vase conţin iniţial 1, 2, 3, 4, respectiv 5 litri de apă. Avem voie să dublăm cantitatea de apă aflată într-un vas turnând apă dintr-un alt vas. Care este cea mai mare cantitate de apă care se poate strânge într-un vas repetând operaţiunea descrisă mai sus?

Concursul KöMaL, 2005

Soluţie:
Iniţial toate vasele conţin un număr întreg de litri, deci vom turna un număr întreg de litri, prin urmare vom obţine mereu un număr întreg de litri în fiecare vas.
La o operaţiune dublăm cantitatea de apă într-un vas şi diminuăm cantitatea de apă dintr-un alt vas. Prin niciuna din acestea nu se pot obţine 15 litri de apă într-un vas (nici prin dublare, nici prin diminuare).
Aşadar, într-un vas putem obţine cel mult 14 litri de apă.
Să arătăm acum că se pot cu adevărat obţine 14 litri de apă într-un vas. Tabelul următor indică o posibilitate de a obţine 14 litri într-un vas descriind situaţia operaţie după operaţie:

după operaţia	*vasul* 1	*vasul* 2	*vasul* 3	*vasul* 4	*vasul* 5
	1	2	3	4	5
1	1	2	3	8	1
2	2	2	3	7	1
3	2	2	2	7	2
4	0	4	2	7	2
5	0	4	0	7	4
6	0	0	0	7	8
7	0	0	0	14	1