Problema 1. Demonstraţi că orice număr natural se poate scrie ca diferenţa a două numere naturale care au acelaşi număr de divizori primi.

Olimpiadă Rusia, 1999

Soluţie:
Evident, putem scrie $0 = 2 - 2$.
Dacă n este un număr par nenul, putem scrie $n = 2n - n$, scriere în care numerele n şi $2n$ au acelaşi număr de factori primi. (De fapt, au chiar aceiaşi divizori.)
Dacă n este impar, vrem să îl scriem pe n ca $n = dn - (d-1)n$ în care numerele dn şi $(d-1)n$ să aibă cu un divizor prim mai mult decât n. Îl putem lua pe d cel mai mic număr prim impar cu care n nu se împarte. Atunci numărul nd îi are ca divizori primi pe d însuşi precum şi divizorii primi ai lui n (care sunt diferiţi de d), deci dn care cu un divizor prim mai mult decât n. Pe de altă parte, $(d-1)n$ este par, dar $d-1$ nu poate avea divizori primi impari care să nu fie şi ai lui n pentru că d este cel mai mic asemenea divizor prim. Aşadar, divizorii primi ai lui $(d-1)n$ sunt divizorii primi ai lui n la care se adaugă 2.

Problema 2. Determinaţi toate numerele reale x, y, z astfel încât

$$(x+y)(x-y)^2 = (y+z)(y-z)^2 = (z+x)(z-x)^2.$$

George Stoica, Canada[1]

Soluţie:
Fie $a = x+y$, $b = y+z$, $c = z+x$. Sistemul devine $a(b-c)^2 = b(c-a)^2 = c(a-b)^2$, adică $ab^2 + ac^2 = bc^2 + ba^2 = ca^2 + cb^2$. Egalitatea $ab^2 + ac^2 = bc^2 + ba^2$ se scrie echivalent $(a-b)(c^2 - ab) = 0$, deci avem $a = b$ sau $c^2 = ab$. Analog se obţine că fie $b = c$, fie $a^2 = bc$ şi că avem şi una din condiţiile $c = a$ şi $b^2 = ac$.
Dacă sunt îndeplinite două din relaţiile $a = b$, $b = c$, $c = a$, rezultă că $a = b = c$, de unde $x = y = z$. Reciproc, dacă $x = y = z$, cele trei expresii din enunţ sunt egale (cu 0), deci orice trei numere egale satisfac enunţul.
Dacă unul din numerele a, b, c este 0, atunci rezultă că (cel puţin) încă unul este 0. Se obţin tripletele cu $x = y = -z$, $y = z = -x$ şi cele cu $z = x = -y$. Şi în aceste cazuri, expresiile din enunţ sunt toate egale (tot cu 0).
Presupunem că a, b, c sunt nenule. Dacă $a^2 = bc$ şi $b^2 = ca$, atunci $a^2b^2 = abc^2$, deci $c^2 = ab$. Rezultă că $a^3 = abc = b^3 = c^3$, deci $a = b = c$, caz tratat anterior.
În concluzie, soluţiile sunt tripletele x, y, z cu $|x| = |y| = |z|$.

[1] problema **S:L17.109.** din supl. GM nr. 3/2017

Problema 3. Se consideră 9 puncte în spaţiu. Se ştie că ele sunt situate pe patru drepte paralele cu dreapta a şi totodată pe trei drepte paralele cu dreapta b. Dreptele a şi b sunt diferite şi neparalele. Demonstraţi că cele nouă puncte sunt coplanare.

Olimpiadă Moscova, 2000

Soluţie:
Conform principiului cutiei, pe una din cele patru drepte paralele cu dreapta a (să o notăm cu a') trebuie să se găsească cel puţin trei din cele 9 puncte. Paralelele la b duse prin aceste puncte sunt distincte (deoarece a şi b nu sunt paralele), deci trebuie să avem exact trei din cele 9 puncte pe dreapta a'. În plus, conform ipotezei, pe paralelele duse din aceste puncte trebuie să se afle toate cele 9 puncte. Dar toate aceste drepte se găsesc într-un plan, de unde concluzia.

Problema 4. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Arătaţi că discurile[2] de diametre $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ şi $[DA]$ acoperă tot interiorul patrulaterului.

* * *

Soluţie:
Fie M un punct în interiorul patrulaterului. Atunci unghiurile $\sphericalangle AMB$, $\sphericalangle BMC$, $\sphericalangle CMD$ şi $\sphericalangle DMA$ sunt unghiuri în jurul unui punct, deci au suma măsurilor $360°$. Atunci cel puţin unul dintre aceste unghiuri are măsura mai mică sau egală cu $90°$. Dacă, de pildă, $m(\sphericalangle AMB) \geq 90°$, atunci discul de diametru $[AB]$ acoperă punctul M.

[2] un disc este reuniunea dintre un cerc şi interiorul său