Problema 1. Fie a şi b două numere naturale nenule cu proprietatea că ab divide a^2+b^2. Arătaţi că $a=b$.

Soluţia 1:
Fie $d=(a,b)$ şi $x,y \in \mathbb{N}$ astfel încât $a=dx$, $b=dy$. Atunci $(x,y)=1$, iar condiţia din enunţ revine la xy divide x^2+y^2. Aşadar x divide x^2+y^2 şi, cum x divide şi x^2, rezultă că x divide şi diferenţa, adică pe y^2. Dar $(x,y)=1$ implică atunci $x=1$. Analog se arată că $y=1$, deci $a=b=d$, adică numerele a şi b sunt egale.

Soluţia 2:
Presupunem că există a şi b diferite pentru care ab divide a^2+b^2.
Dacă $a=1$, atunci din b divide b^2+1 rezultă b divide 1, deci $b=1=a$. Analog dacă $b=1$.
Dacă $a,b>1$ şi $a\neq b$, atunci există un factor prim p care apare la exponenţi diferiţi în descompunerile în factori primi ale lui a şi b. Dacă $a=p^n\cdot x$ cu $n,x\in\mathbb{N}$, $(x,p)=1$ şi $b=p^m\cdot y$ cu $n,x\in\mathbb{N}$, $(x,p)=1$, atunci exponentul lui p în descompunerea în factori primi a lui ab este $m+n$, în timp ce exponentul lui p în descompunerea lui a^2+b^2 este $\min\{2m,2n\}$. Din condiţia $ab \mid a^2+b^2$ rezultă $m+n\leq \min\{2m,2n\}$, ceea ce nu este posibil decât dacă $m=n$.

Problema 2.
a) Arătaţi că dacă $a,b,c\geq 1$, atunci $a+b+c+3abc\geq 2(ab+bc+ca)$. Când are loc egalitatea?
b) Arătaţi că dacă $a,b,c\in[0,1]$, atunci $a+b+c+3abc\geq 2(ab+bc+ca)$. Când are loc egalitatea?
c) Este adevărat că $a+b+c+3abc\geq 2(ab+bc+ca)$, pentru orice $a,b,c\geq 0$?

Soluţie: Inegalitatea din enunţ se poate scrie echivalent

$$a(b-1)(c-1)+b(c-1)(a-1)+c(a-1)(b-1)\geq 0.$$

a) Dacă $a,b,c\geq 1$, fiecare termen din membrul stâng al inegalităţii de mai sus este mai mare sau egal cu 0 ca produs de trei numere nenegative. Egalitate avem dacă fiecare termen este 0, adică, a,b,c fiind nenule, dacă $(a-1)(b-1)=(b-1)(c-1)=(c-1)(a-1)=0$. Această condiţie se realizează dacă şi numai dacă două dintre numerele a,b,c sunt egale cu 1, iar cel de-al treilea este orice număr mai mare sau egal cu 1.

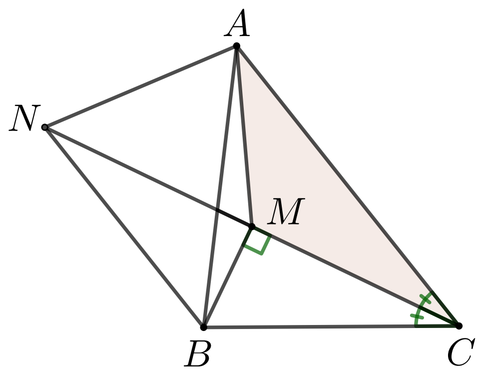
b) Dacă $a,b,c\in[0,1]$, fiecare termen este mai mare sau egal cu 0 ca produs de trei numere, unul ≥ 0, celelalte două ≤ 0. Egalitate avem dacă fiecare termen este 0, adică dacă $c(a-1)(b-1)=a(b-1)(c-1)=b(c-1)(a-1)=0$. Dacă niciunul din numere nu este egal cu 1, atunci trebuie ca $a=b=c=0$, iar dacă măcar unul din numerele a,b,c este egal cu 1, să zicem a, atunci trebuie ca $(b-1)(c-1)=0$, deci trebuie ca încă unul din numere să fie egal cu 1. Prin urmare, egalitate avem dacă $a = b = c = 0$ sau dacă două dintre numerele a, b, c sunt egale cu 1, iar cel de-al treilea este orice număr din $[0, 1]$.

c) Inegalitatea nu este adevărată pentru orice $a, b, c \geq 0$. De exemplu, pentru $a = 0$, $b = c = 2$ ea revine la $4 \geq 8$, prin urmare nu este îndeplinită.

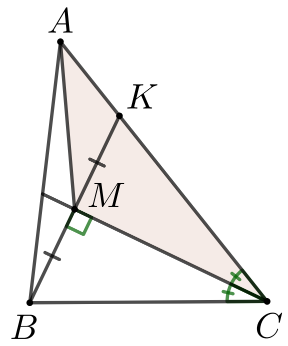
Problema 3.
Fie ABC un triunghi de arie 1. Notăm cu M piciorul perpendicularei din B pe bisectoarea unghiului C. Determinaţi aria triunghiului AMC.

Olimpiada de geometrie „I. F. Sharygin", 2009

Soluţia 1: (oficială) Paralela prin B la AC intersectează bisectoarea unghiului C în punctul N. Cum $\sphericalangle BNC \equiv \sphericalangle ACN \equiv \sphericalangle BCN$, triunghiul BCN este isoscel, iar $[BM]$ este mediană în acest triunghi. Atunci $\mathcal{A}_{AMC} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ANC} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}$. (Triunghiurile ANC şi ABC sunt echivalente deoarece au aceeaşi bază, $[AC]$, iar înălţimile corespunzătoare acesteia sunt congruente pentru că $BN \parallel AC$.)



Soluţia 2:
Dacă $\{K\} = BM \cap AC$, atunci în triunghiul BCK segmentul $[CM]$ va fi bisectoare şi înălţime, deci şi mediană. Aşadar M este mijlocul lui $[BK]$, astfel că $\mathcal{A}_{BMC} = \mathcal{A}_{KMC}$ şi $\mathcal{A}_{BMA} = \mathcal{A}_{KMA}$. Prin adunare obţinem că $\mathcal{A}_{AMC} = \mathcal{A}_{BMC} + \mathcal{A}_{BMA} = \mathcal{A}_{ABC} - \mathcal{A}_{AMC}$, de unde $\mathcal{A}_{AMC} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}$.



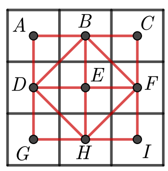
Soluţia 3: (o a doua soluţie oficială, mai scurtă, dar care depăşeşte nivelul clasei a VII-a)
Cum $\mathcal{A}_{AMC} = \frac{1}{2}AC \cdot CM \sin\frac{C}{2}$ şi $CM = BC\cos\frac{C}{2}$, avem $\mathcal{A}_{AMC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC \sin\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} = \frac{1}{4}AC \cdot BC \sin C = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}$.

Problema 4. Un pătrat 3×3 este împărţit în nouă pătrăţele 1×1. Fie M mulţimea centrelor acestor nouă pătrăţele.
a) Arătaţi că există 6 pătrate care au toate vârfurile în mulţimea M.
b) Pe fiecare punct din mulţimea M se scrie unul din numerele de la 1 la 9 astfel încât fiecare număr să fie folosit exact o dată şi, pentru fiecare din cele şase pătrate care au vârfurile în M, suma numerelor scrise pe cele patru vârfuri ale sale să fie aceeaşi.
În câte moduri se poate se poate face etichetarea vârfurilor ca să fie îndeplinite condiţiile de mai sus?

Olimpiadă Rusia, 1998

Soluţie:

a) Notând centrele pătratelor formate cu A, B, C, D, E, F, G, H, I ca în figura alăturată, se formează următoarele 6 pătrate: $ABED$, $BCFE$, $DEHG$, $EFIH$, $ACIG$ şi $BFHD$.



b) Notând cu $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ numerele scrise pe punctele A, B, C, D, E, F, G, H, respectiv I şi cu s valoarea comună a sumei numerelor din vârfurile fiecăruia din cele şase pătrate, avem $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ şi $a + b + e + d = b + c + f + e = d + e + h + g = e + f + i + h = a + c + i + g = b + f + h + d = s$.
Atunci $4s = (a + b + e + d) + (b + c + f + e) + (d + e + h + g) + (e + f + i + h) = (a + c + i + g) + 2(b + f + h + d) + 4e = 3s + e$, de unde $s = 4e$.
Pe de altă parte, $45 = a+b+c+d+e+f+g+h+i = (a+c+i+g)+(b+f+h+d)+e =$

$s + s + e = 4e + 4e + e = 9e$, de unde $e = 5$ şi $s = 20$.
Deoarece 5 este în centru, 1 şi 5 vor face parte dintr-un acelaşi pătrat. Împreună cu ele trebuie să apară două numere (diferite de ele şi diferite între ele) care au suma 14. Acestea nu pot fi decât 8 şi 6, deci 1 şi 5 fac parte (împreună) dintr-un singur pătrat, prin urmare 1 trebuie să se afle într-un colţ, iar 6 şi 8 trebuie să fie în pătratele vecine respectivului colţ. Similar, 9 trebuie să se afle într-un colţ: cu 5 şi 9 într-un acelaşi pătrat trebuie să se mai afle numerele 2 şi 4. Prin urmare, lângă 9 trebuie să stea numerele 2 şi 4, prin urmare 9 trebuie să stea în colţul opus lui 1. În fine, faţă de diagonala $1 - 5 - 9$, numerele 4 şi 6 trebuie să se afle de părţi diferite (altfel în colţul pătratului în care se află deja 4, 5 şi 6 ar trebui pus din nou 5). În concluzie, colţul în care se află numărul 1 poate fi ales în 4 moduri, apoi partea diagonalei de care se află numerele 4 şi 2 (şi deci şi 8) poate fi aleasă în două moduri, prin urmare sunt 8 etichetări posibile ale elementelor lui S.