Problema săptămânii 155

Demonstraţi că orice număr natural nenul n se poate scrie în mod unic sub forma $n = \sum_{j=1}^{2k+1} (-1)^{j-1} 2^{m_j}$, unde $k \geq 0$ şi $0 \leq m_1 < m_2 < \ldots < m_{2k+1}$ sunt numere naturale.

Romanian Masters of Mathematics, 2017, problema 1 a)

Soluţie:

Soluţia oficială o puteţi găsi pe pagina RMM.

Vă propunem o soluţie alternativă.

Existenţa:

Orice număr natural nenul se scrie în mod unic sub forma $n = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \ldots + 2^{b_s}$, unde $s \geq 1$ şi $0 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_s$ sunt numere naturale. Atunci putem scrie $n = 2^{b_s+1} - 2^{b_s} + 2^{b_{s-1}+1} - 2^{b_{s-1}} + \ldots + 2^{b_2+1} - 2^{b_2} + 2^{b_1}$. Exponenţii $0 \leq b_1 < b_2 < b_2 + 1 \leq b_3 < b_3 + 1 \leq b_{s-1} < b_{s-1} + 1 \leq b_s < b_s + 1$ nu sunt neapărat în ordine strict crescătoare, dar după ce reducem eventualii termeni asemenea, obţinem o scriere de forma dorită.

Numărul de termeni rămaşi este $2k + 1$, unde k reprezintă numărul de blocuri de cifre de 1 din scrierea în baza 2 a numărului obţinut prin ştergerea ultimei cifre 1 din scrierea în baza 2 a lui n.

Unicitatea:

Rezultă tot din construcţia de mai sus. Dacă $n = \sum_{j=1}^{2k+1} (-1)^{j-1} 2^{m_j}$, atunci $n = \left(2^{m_{2k+1}} - 2^{m_{2k}}\right) + \ldots + \left(2^{m_3} - 2^{m_2}\right) + 2^{m+1} = \left(2^{m_{2k+1}-1} + \ldots + 2^{m_{2k}}\right) + \ldots + \left(2^{m_3-1} + \ldots + 2^{m_2}\right) + 2^{m_1}$, ultima scriere fiind tocmai reprezentarea (unică) a numărului n în baza 2. Aşadar, dacă n ar avea două reprezentări diferite ca sumă alternantă de puteri ale lui 2, atunci, corespunzător, n ar avea şi două scrieri diferite în baza 2, ceea ce nu se poate.

Problem of the week no. 155

Prove that every positive integer n can be written uniquely in the form $n = \sum_{j=1}^{2k+1} (-1)^{j-1} 2^{m_j}$, where $k \geq 0$ and $0 \leq m_1 < m_2 < \ldots < m_{2k+1}$ are integers.

Romanian Masters of Mathematics, 2017, problem 1 a)

Solution:

The official solution can we found on the competitionş web-page: RMM.

We propose an alternative solution.

the existence part:

Any positive integer can be written uniquely as $n = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \ldots + 2^{b_s}$, where $s \geq 1$ and $0 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_s$ are integers. We can write $n = 2^{b_s+1} - 2^{b_s} + 2^{b_{s-1}+1} - 2^{b_{s-1}} + \ldots + 2^{b_2+1} - 2^{b_2} + 2^{b_1}$. The exponents $0 \leq b_1 < b_2 < b_2 + 1 \leq b_3 < b_3 + 1 \leq$

$b_{s-1} < b_{s-1} + 1 \le b_s < b_s + 1$ are nor necessarily in strictly increasing order but, after canceling out all possible similar terms, we obtain the desired representation. The number of remaining terms is $2k+1$, where k is the number of 1-blocks in the binary representation of the number obtained by erasing the last digit equal to 1 in the binary representation of n.

Uniqueness:

Uniqueness also follows from the construction above. If $n = \sum_{j=1}^{2k+1} (-1)^{j-1} 2^{m_j}$, then $n = \left(2^{m_{2k+1}} - 2^{m_{2k}}\right) + \ldots + \left(2^{m_3} - 2^{m_2}\right) + 2^{m+1} = \left(2^{m_{2k+1}-1} + \ldots + 2^{m_{2k}}\right) + \ldots + (2^{m_3-1} + \ldots + 2^{m_2}) + 2^{m_1}$, the last being exactly the (unique) binary representation of n. Thus, if n would have two different representations as alternating sums of strictly decreasing powers of 2, then, correspondingly, n would also have two different binary representations, which is a contradiction.