Problema săptămânii 154
Demonstraţi că pentru orice $n \geq 2$ există n numere reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$, diferite de 1, astfel încât produsele $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ şi $\frac{1}{1-x_1} \cdot \frac{1}{1-x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x_n}$ să fie egale.

Olimpiadă Spania, 2019

Soluţia 1:
Pentru $n = 2$, ecuaţia revine la $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{x_1 - 1} \cdot \frac{1}{x_2 - 1}$. Putem alege x_1 şi x_2 soluţii ale ecuaţiei $x = \frac{1}{x-1}$, adică $x^2 - x - 1 = 0$. De pildă, putem lua $x_1 = x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Pentru $n = 3$, observăm că pentru $x_1 = x_2 = 2$ obţinem pentru x_3 ecuaţia $4x_3 = \frac{1}{1-x_3} \Leftrightarrow 4x_3^2 - 4x_3 + 1 = 0$, care are soluţia $x_3 = \frac{1}{2}$, deci pentru $n = 3$ putem alege $x_1 = x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{2}$.
În general, pentru n par putem alege $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, iar pentru n impar $x_1 = x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = x_5 = \ldots = x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Observaţie: Pentru $n = 2$ se poate căuta x_1 pentru care ecuaţia $x_1 x_2 = \frac{1}{1-x_1} \cdot \frac{1}{1-x_2} \Leftrightarrow x_2^2 - x_2 + \frac{1}{x_1(1-x_1)} = 0$ are o soluţie $x_2 \neq 1$. Condiţia $\Delta \geq 0$ este uşor de satisfăcut (alegând $x_1 < 0$ sau $x_1 > 1$).

O soluţie asemănătoare am primit de la *Ioana Stănoiu.*

Soluţia 2: (*David-Andrei Anghel*)
Condiţia din enunţ revine la $x_1(1-x_1) \cdot x_2(1-x_2) \cdot \ldots \cdot x_n(1-x_n) = 1$. Notăm $A = x_2(1-x_2) \cdot x_3(1-x_3) \cdot \ldots \cdot x_n(1-x_n)$. Vrem ca $x_1(1-x_1) \cdot A = 1$, adică vrem ca ecuaţia de gradul II $Ax^2 - Ax + 1 = 0$ să aibă soluţii. Condiţia $\Delta \geq 0$ revine la $A^2 - 4A \geq 0$, deci la $A(A-4) \geq 0$ şi este satisfăcută de îndată ce $A \leq 0$. Alegem $x_2 = -1$ şi $x_3 = x_4 = \ldots = x_n = \frac{1}{2}$. Atunci $A = -2 \cdot \frac{1}{4^{n-2}} < 0$ şi alegând x_1 o soluţie a ecuaţiei $Ax^2 - Ax + 1 = 0$, avem condiţia satisfăcută. (Să mai observăm că $x = 1$ nu este soluţie a ecuaţiei $Ax^2 - Ax + 1 = 0$, deci $x_1 \neq 1$.)

Soluţia 3: (Andrei-Giovani Chiriţă)
Condiţia din enunţ revine la $x_1(1-x_1) \cdot x_2(1-x_2) \cdot \ldots \cdot x_n(1-x_n) = 1$. Dar $x(1-x) = y \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 1 - 4y$, deci imaginea funcţiei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(1-x)$ este $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$.
Problema se rezumă la arăta că există $y_1, y_2, \ldots, y_n \leq \frac{1}{4}$ astfel încât $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = 1$.
Pentru n par alegem $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = -1$, iar pentru n impar alegem $y_1 = -4$, $y_2 = \frac{1}{4}$, $y_3 = y_4 = \ldots = y_n = -1$.

Problem of the week no. 154
Prove that, for all $n \geq 2$ there exist n real numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$, different from 1, such that the products $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ and $\dfrac{1}{1-x_1} \cdot \dfrac{1}{1-x_2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{1}{1-x_n}$ are equal.

Spanish Mathematical Olympiad, 2019

Solution 1:
For $n = 2$, the equation becomes $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1}{x_1 - 1} \cdot \dfrac{1}{x_2 - 1}$. We can choose x_1 and x_2 to be solutions of the equation $x = \dfrac{1}{x-1}$, i.e. of the quadratic equation $x^2 - x - 1 = 0$. We can choose $x_1 = x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
For $n = 3$, notice that putting $x_1 = x_2 = 2$ we obtain that x_3 must satisfy $4x_3 = \dfrac{1}{1-x_3} \Leftrightarrow 4x_3^2 - 4x_3 + 1 = 0$, which has the solution $x_3 = \dfrac{1}{2}$. In conclusion, for $n = 3$ we may choose $x_1 = x_2 = 2$, $x_3 = \dfrac{1}{2}$.
In general, for n even we can choose $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, while for n odd we can take $x_1 = x_2 = 2$, $x_3 = \dfrac{1}{2}$, $x_4 = x_5 = \ldots = x_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Remark: For $n = 2$ one can look for x_1 for which the equation $x_1 x_2 = \dfrac{1}{1-x_1} \cdot \dfrac{1}{1-x_2} \Leftrightarrow x_2^2 - x_2 + \dfrac{1}{x_1(1-x_1)} = 0$ has a solution $x_2 \neq 1$. The condition $\Delta \geq 0$ is easy to satisfy (by taking $x_1 < 0$ or $x_1 > 1$).

Solution 2: (*David-Andrei Anghel*)
The condition from the statement reduces to $x_1(1-x_1) \cdot x_2(1-x_2) \cdot \ldots \cdot x_n(1-x_n) = 1$. Denote $A = x_2(1-x_2) \cdot x_3(1-x_3) \cdot \ldots \cdot x_n(1-x_n)$. We want $x_1(1-x_1) \cdot A = 1$, i.e. we want the quadratic equation $Ax^2 - Ax + 1 = 0$ to have solutions. The condition $\Delta \geq 0$ is equivalent to $A^2 - 4A \geq 0$, i.e. to $A(A-4) \geq 0$, and it is fulfilled as soon as $A \leq 0$. We choose $x_2 = -1$ and $x_3 = x_4 = \ldots = x_n = \dfrac{1}{2}$. Then $A = -2 \cdot \dfrac{1}{4^{n-2}} < 0$ and taking x_1 to be a solution of $Ax^2 - Ax + 1 = 0$, our condition is satisfied. (Note that $x = 1$ is not a solution of $Ax^2 - Ax + 1 = 0$, therefore $x_1 \neq 1$.)

Solution 3: (Andrei-Giovani Chiriţă)
The condition from the statement reduces to $x_1(1-x_1) \cdot x_2(1-x_2) \cdot \ldots \cdot x_n(1-x_n) = 1$. But $x(1-x) = y \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 1 - 4y$ means that the image of the function $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(1-x)$ is $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$.
The problem reduces to finding $y_1, y_2, \ldots, y_n \leq \frac{1}{4}$ such that $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = 1$.
For n even we choose $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = -1$, while for n odd we take $y_1 = -4$, $y_2 = \frac{1}{4}$, $y_3 = y_4 = \ldots = y_n = -1$.