Problema săptămânii 152
Determinaţi cel mai mare număr natural n pentru care următoarea afirmaţie este adevărată:
„pentru orice colorare a planului cu n culori există o dreaptă în plan care conţine puncte de cel puţin $n-1$ culori".

din cartea *Geometrie combinatorică*, de Vasile Pop

Soluţie:
Vom demonstra că cel mai mare număr cu proprietatea cerută este 4.
Să începem prin a arăta că 4 are într-adevăr proprietatea din enunţ.
Fie A, B, C, D puncte de culorile (distincte) c_1, c_2, c_3, respectiv c_4. Dacă printre aceste patru puncte există trei coliniare, am găsit o dreaptă care conţine puncte de 3 culori. Dacă nu, cele patru puncte sunt vârfurile unui patrulater (nu neapărat convex). Ne uităm la punctul de intersecţie a (dreptelor suport ale) diagonalelor. Indiferent ce culoare ar avea acesta, pe una sau cealaltă dintre dreptele suport ale diagonalelor vom avea trei puncte de culori diferite.
Pentru a arăta că niciun $n > 4$ nu are proprietatea cerută, trebuie dat, pentru fiecare $n > 4$, câte un exemplu de colorare a punctelor planului cu n culori astfel încât să nu existe nicio dreaptă care să conţină puncte de cel puţin $n-1$ culori. Există mai multe asemenea exemple.
Exemplul 1 (din cartea amintită mai sus)
Considerăm o dreaptă d şi îi colorăm punctele cu $n-2$ culori. Toate punctele dintr-un acelaşi semiplan determinat de dreapta d le colorăm cu o aceeaşi culoare (folosind culori diferite în cele două semiplane, culori diferiteşi de cele $n-2$ folosite la colorarea dreptei d).
Exemplul 2 (*Andrei-Giovani Chiriţă, Gabriel Turbincă*)
Considerăm $n-1$ puncte, nicicare trei coliniare şi le colorăm cu $n-1$ culori diferite. Celelalte puncte ale planului le colorăm cu cea de-a n-a culoare.
Exemplul 3 (*David-Andrei Anghel*)
Pentru $n = 5$ considerăm în plan un sistem de axe xOy şi colorăm punctele planului astfel: punctele cu $x \geq 0$, $y > 0$ cu culoarea c_1, punctele cu $x < 0$, $y \geq 0$ cu culoarea c_2, punctele cu $x \leq 0$, $y < 0$ cu culoarea c_3, punctele cu $x > 0$, $y \leq 0$ cu culoarea c_4, punctul O cu culoarea c_5. Nicio dreaptă nu conţine puncte de 4 culori diferite.
Pentru $n > 5$ putem schimba culoarea unora din punctele planului în culorile noi. Nicio dreaptă nu va conţine puncte de mai mult de trei dintre culorile c_1, c_2, c_3, c_4, c_5.

Un exemplu mai complicat am primit de la *Ioana Stănoiu.*

Problem of the week no. 152
Determine the greatest positive integer n for which the following statement is true: "for each coloring of the plane with n colors, there exists a line in the plane that contains points of at least $n-1$ colors".

from the book *Combinatorial Geometry*, by Vasile Pop

Solution:
We prove that the greatest positive integer that fulfills the statement is 4.
We start by proving that 4 does indeed satisfy the given statement.
Let A, B, C, D points having the (distinct) colors c_1, c_2, c_3, and c_4, respectively. If among these four points there are three collinear ones, we are done. If not, then these four points are the vertices of a quadrilateral (not necessarily of a convex one). We look at the intersection of the (support lines of the) diagonals. Irrespective of its color, one of the support lines of the diagonals will contain points of at least three distinct colors.
In order to prove that no $n > 4$ satisfies the statement, we must provide, for every $n > 4$, an example of a way to color the points of the plane with n colors such that there is no line containing points of at least $n-1$ colors. There are several such examples.
Example 1 (from Vasile Pop's book)
Consider a line d and color its points by using $n-2$ of the n colors. We color all the points in one half-plane determined by d with one of the remaining colors and we color all the points of the other half-plane with the other remaining color.
Example 2 (*Andrei-Giovani Chiriţă, Gabriel Turbincă*)
Consider $n-1$ point, no three of them collinear, and color them with $n-1$ different colors. Color all other points with the last color.
Example 3 (*David-Andrei Anghel*)
For $n = 5$ consider a Cartesian coordinate system xOy and color the points as follows: points $P(x, y)$ with $x \geq 0$, $y > 0$ are of color c_1, those with $x < 0$, $y \geq 0$ get color c_2, points with $x \leq 0$, $y < 0$ take color c_3, points with $x > 0$, $y \leq 0$ get color c_4, and the origin O is of color c_5. No line contains points of more than three colors.
For $n > 5$ we can repaint with the new colors some of the points. No line contains points of more than three of the colors c_1, c_2, c_3, c_4, c_5.