Problema săptămânii 151
Demonstraţi că dacă a şi b sunt numere raţionale cu proprietatea $a^5 + b^5 = 2a^2b^2$, atunci $1 - ab$ este pătratul unui număr raţional.

Olimpiadă Marea Britanie

Soluţia 1: (*Gabriel Turbincă*)
Înmulţim relaţia din enunţ cu a şi scriem egalitatea obţinută sub forma $(a^3-b^2)^2 = b^4(1-ab)$. Dacă $b = 0$ atunci $1 - ab = 1$ este pătratul unui număr raţional. Dacă $b \neq 0$, obţinem $1 - ab = \left(\frac{a^3 - b^2}{b^2}\right)^2$, unde $\frac{a^3 - b^2}{b^2}$ este număr raţional.
Soluţia 2: (*David-Andrei Anghel, Andrei-Giovani Chiriţă, Radu Lecoiu*)
Ridicând la pătrat obţinem $a^{10}+2a^5b^5+b^{10} = 4a^4b^4$, sau $(a^5-b^5)^2 = 4a^4b^4(1-ab)$. Dacă $ab = 0$, atunci $1 - ab = 1^2$, iar dacă $ab \neq 0$ atunci $1 - ab = \left(\frac{a^5 - b^5}{2a^2b^2}\right)^2$.
Soluţia 3: (*Daniel Văcaru, Marius Valentin Drăgoi*)
Dacă $ab = 0$, concluzia este evidentă. Considerăm acum $ab \neq 0$. Rescriem relaţia din enunţ sub forma $a \cdot \left(\frac{a^2}{b^2}\right) + b \cdot \left(\frac{b^2}{a^2}\right) = 2$. Notând $t = \frac{a^2}{b^2}$, ştim că t verifică ecuaţia $at + \frac{b}{t} = 2$, adică $at^2 - 2t + b = 0$. Ştim că această ecuaţie de gradul II are soluţii raţionale. Deducem că discriminantul, $\Delta = 4(1-ab)$, este pătratul unui număr raţional, de unde concluzia.
Soluţia 4: (*Ioana Stănoiu*)
Dacă $ab = 0$, concluzia este evidentă. Considerăm acum $ab \neq 0$. Notăm $\frac{a}{b} = t$. Atunci $a^5 + b^5 = 2a^2b^2 \Leftrightarrow b^5(1 + t^5) = 2b^4t^2$, deci $t \neq -1$ şi $b = \frac{2t^2}{1+t^5}$, iar $a = \frac{2t^3}{1+t^5}$. Rezultă că $1 - ab = 1 - \frac{4t^5}{(1+t^5)^2} = \left(\frac{1-t^5}{1+t^5}\right)^2$.
Generalizare: Dacă n este un număr natural şi a, b sunt numere raţionale cu proprietatea $a^{2n+1}+b^{2n+1} = 2a^nb^n$, atunci $1-ab$ este pătratul unui număr raţional.

Problem of the week no. 151
If a and b are rational numbers satisfying $a^5 + b^5 = 2a^2b^2$, prove that $1 - ab$ is the square of a rational number.

British Mathematical Olympiad

Solution 1: (*Gabriel Turbincă*)
We multiply the equality $a^5 + b^5 = 2a^2b^2$ by a and rewrite the equation as $(a^3 - b^2)^2 = b^4(1 - ab)$. If $b = 0$, then $1 - ab = 1$ is the square of a rational number. If $b \neq 0$, we get $1-ab = \left(\frac{a^3 - b^2}{b^2}\right)^2$, where $\frac{a^3 - b^2}{b^2}$ is a rational number.
Solution 2: (*David-Andrei Anghel, Andrei-Giovani Chiriţă, Radu Lecoiu*)
Squaring the given equality yields $a^{10} + 2a^5b^5 + b^{10} = 4a^4b^4$, i.e. $(a^5 - b^5)^2 =$

$4a^4b^4(1-ab)$. If $ab=0$, then $1-ab=1^2$, while if $ab\neq 0$ then $1-ab=\left(\dfrac{a^5-b^5}{2a^2b^2}\right)^2$.

Solution 3: (*Daniel Văcaru, Marius Valentin Drăgoi*)
If $ab=0$, the conclusion is clear. Assume $ab\neq 0$. We rewrite the given condition as $a\cdot\left(\dfrac{a^2}{b^2}\right)+b\cdot\left(\dfrac{b^2}{a^2}\right)=2$. Putting $t=\dfrac{a^2}{b^2}$, we know that t satisfies the equation $at+\dfrac{b}{t}=2$, i.e. $at^2-2t+b=0$. We know that this quadratic equation has rational solutions. It follows that $\Delta=4(1-ab)$ is the square of a rational number, hence the conclusion.

Solution 4: (*Ioana Stănoiu*)
If $ab=0$, the conclusion is clear. Assume $ab\neq 0$. Put $\dfrac{a}{b}=t$. Then $a^5+b^5=2a^2b^2 \Leftrightarrow b^5(1+t^5)=2b^4t^2$, hence $t\neq -1$, $b=\dfrac{2t^2}{1+t^5}$, and $a=\dfrac{2t^3}{1+t^5}$. It follows that $1-ab=1-\dfrac{4t^5}{(1+t^5)^2}=\left(\dfrac{1-t^5}{1+t^5}\right)^2$.

Remark: If n is a positive integer and a, b are rational numbers satisfying $a^{2n+1}+b^{2n+1}=2a^nb^n$, then $1-ab$ is the square of a rational number.