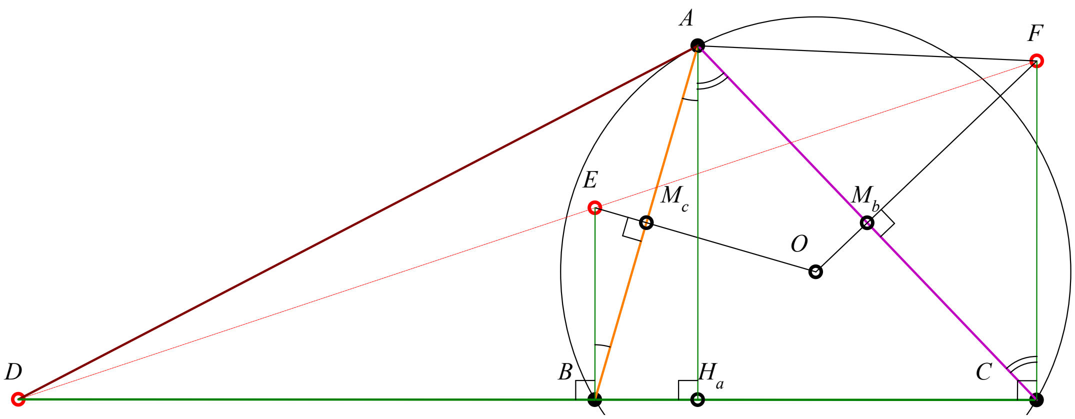
PROBLEMA SĂPTĂMÂNII nr.153:

Fie $O-$ ***centrul cercului circumscris triunghiului*** ABC, ***în care:*** $|AB|<|AC|$. ***Tangenta în*** A ***la cercul circumscris triunghiului*** ABC, ***intersectează dreapta*** BC, ***în punctul*** D. ***Perpendicularele ridicate în punctele*** B ***şi*** C ***pe dreapta*** BC, ***intersectează mediatoarele laturilor*** $[AB]$ ***şi*** $[AC]$ ***în punctele*** E ***şi respectiv*** F. ***Demonstraţi că punctele*** D, E ***şi*** $F-$ ***sunt coliniare.***



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): Notând cu M_b şi M_c-mijloacele laturilor $[AC]$ şi respective $[AB]$; iar cu H_a-piciorul înălţimii duse din vârful A al ΔABC, avem:

$$\left.\begin{array}{r} BE, AH_a \perp BC \Rightarrow BE \parallel AH_a \Rightarrow \widehat{EBA} \equiv \widehat{H_aAB} \\ \left.\begin{array}{r} M_cE \perp AB \\ AH_a \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{EBM_c} \equiv \widehat{BH_aA} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta EBM_c \sim \Delta BAH_a \Rightarrow \frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|BM_c|}{|AH_a|} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow |BE| = \dfrac{|AB|\cdot|BM_c|}{|AH_a|} \\ |BM_c| = |AM_c| = \dfrac{1}{2}\cdot|AB| \end{array}\right\} \Rightarrow |BE| = \frac{|AB|^2}{2\cdot|AH_a|}. \quad (1)$$

În mod analog arătăm că $\Delta CFM_b \sim \Delta ACH_a$ şi apoi că: $|CF| = \dfrac{|AC|^2}{2\cdot|AH_a|}. \quad (2)$

Împărţind acum relaţiile (1) şi (2), membru cu membru, obţinem: $\dfrac{|BE|}{|CF|} = \dfrac{|AB|^2}{|AC|^2}. \quad (3)$

Pe de altă parte, din:

$$\left.\begin{array}{r} AD \cap \odot ABC = \{A\} \Rightarrow \widehat{DAB} \equiv \widehat{DCA} \\ \widehat{ADB} = \widehat{ADC} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DAB \sim \Delta DCA \Rightarrow \frac{|DB|}{|DA|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|DA|}{|DC|} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \dfrac{|DB|}{|DC|} = \dfrac{|DB|}{|DA|}\cdot\dfrac{|DA|}{|DC|} = \left(\dfrac{|AB|}{|AC|}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{|DB|}{|DC|} = \dfrac{|AB|^2}{|AC|^2} \\ \dfrac{|BE|}{|CF|} = \dfrac{|AB|^2}{|AC|^2}; (3) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|BE|}{|CF|}. \quad (4)$$

În fine, din:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{|DB|}{|DC|} = \dfrac{|BE|}{|CF|} (4) \\ BE, CF \perp BC \Rightarrow \widehat{DBE} \equiv \widehat{DCF} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DBE \sim \Delta DCF \Rightarrow \widehat{EDB} \equiv \widehat{FDC} \Rightarrow [DE = [DF \Rightarrow E \in DF. \blacksquare$$