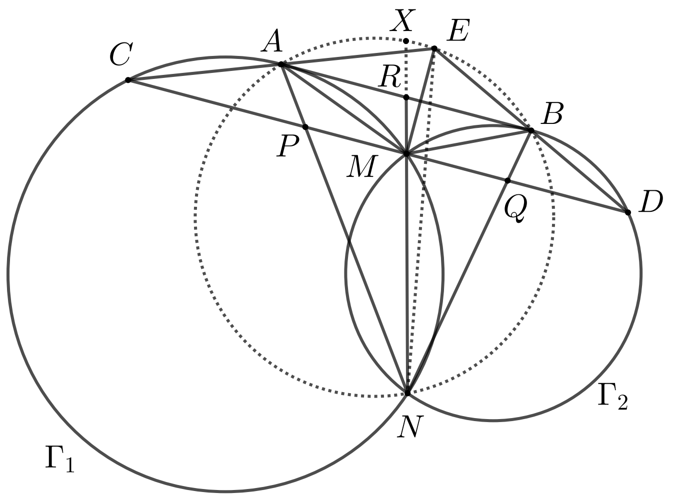
Problema săptămânii 149
Două cercuri, Γ_1 şi Γ_2, se intersectează în M şi N. Fie ℓ tangenta comună cercurilor Γ_1 şi Γ_2 pentru care M este mai aproape de ℓ decât N. Dreapta ℓ intersectează Γ_1 în A şi Γ_2 în B. Paralela prin M la ℓ taie din nou cercul Γ_1 în C şi cercul Γ_2 în D. Dreptele CA şi DB se intersectează în E; dreptele AN şi CD se intersectează în P; dreptele BN şi CD se intersectează în Q. Demonstraţi că $EP = EQ$.

OIM, 2000

Soluţie: (*Radu Lecoiu, Ervin Macić*)
Fie $\{R\} = MN \cap AB$. R este pe axa radicală a celor două cercuri, deci are putere egală faţă de ele, adică $RA^2 = RB^2$. Deducm că R este mijlocul lui $[AB]$, deci M este mijlocul lui $[PQ]$.
Avem $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle ACM \equiv \sphericalangle BAM$ şi $\sphericalangle EBA \equiv \sphericalangle BDM \equiv \sphericalangle ABM$, deci triunghiurile EAB şi MAB sunt congruente (ULU). Rezultă că $EA = AM$, deci $EM \perp AB$, prin urmare $EM \perp PQ$.
Aşadar, în triunghiul PEQ, $[EM]$ este mediană şi înălţime, deci triunghiul este isoscel cu $EP = EQ$.



Remarci: 1. Dacă notăm cu X punctul în care dreapta NM taie pentru a doua oară cercul circumscris triunghiului NAB, atunci $MAXB$ este paralelogram. (*David Andrei Anghel*)
2. Cercul circumscris triunghiului NAB trece prin punctul E.
3. Semidreapta $(NE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle CND$. (user *Arne* pe AoPS)

Problem of the week no. 149
Two circles Γ_1 and Γ_2 intersect at M and N. Let ℓ be the common tangent to Γ_1 and Γ_2 so that M is closer to ℓ than N is. Let ℓ touch Γ_1 at A and Γ_2 at B. Let the line through M parallel to ℓ meet the circle Γ_1 again at C and the circle Γ_2

again at D. Lines CA and DB meet at E; lines AN and CD meet at P; lines BN and CD meet at Q. Show that $EP = EQ$.

IMO, 2000

A nicely explained solution can be found in The Mathematical Excalibur, see Example 11 here.

Further solutions can be found on AoPS.