Problema săptămânii 148
În plan se consideră un sistem de coordonate xOy. Un punct din plan se numeşte *punct laticial* dacă are ambele coordonate întregi. Fiind dată o mulţime finită S de puncte laticiale, efectuăm în mod repetat următoarea operaţie: dacă A, B sunt puncte laticiale diferite din S, iar C, D sunt două puncte laticiale diferite care nu sunt în S şi pentru care $ACBD$ este un paralelogram în care $AB > CD$, înlocuim A, B cu C, D. Arătaţi că se pot efectua numai un număr finit de asemenea operaţii.

Joe Benton, Short List RMM, 2018

Soluţia 1: Vom demonstra că la fiecare operaţia, suma pătratelor distanţelor de la punctul O la punctele mulţimii S se micşorează. Un şir de numere naturale nu poate descreşte decât de un număr finit de ori.
Dacă notăm cu M centrul paralelogramului $ACBD$, avem, din formula medianei, $4OM^2 = 2(OA^2 + OB^2) - AB^2 = 2(OC^2 + OD^2) - CD^2$. (Această formulă rămâne validă şi în cazul unui triunghi degenerat.) Cum $AB > CD$, rezultă $OA^2 + OB^2 > OC^2 + OD^2$. Suma pătratelor distanţelor de la O la celelalte puncte din S nu se schimbă, deci, prin înlocuirea punctelor A, B cu C, D, suma pătratelor distanţelor scade.

Soluţia 2: Vom demonstra că la fiecare operaţia, suma pătratelor distanţelor dintre două puncte ale mulţimii S se micşorează. Un şir de numere naturale nu poate descreşte decât de un număr finit de ori.
Dacă notăm cu M centrul paralelogramului $ACBD$ şi cu P un punct din S, altul decât A şi B, avem, din formula medianei, $PM^2 = \dfrac{2(PA^2 + PB^2) - AB^2}{4} = \dfrac{2(PC^2 + PD^2) - CD^2}{4}$. Cum $AB > CD$, rezultă că $PA^2 + PB^2 > PC^2 + PD^2$. De asemenea, $AB^2 > CD^2$. Suma pătratelor distanţelor dintre celelalte puncte din S nu se schimbă, deci, prin înlocuirea punctelor A, B cu C, D, suma pătratelor distanţelor scade.

Remarcă: (*Ioana Stănoiu*)
Operaţia descrisă în enunţul problemei nu modifică centrul de greutate al sistemului de puncte din S.
Problemă deschisă: (*Ioana Stănoiu*)
Care sunt mulţimile S de n elemente pentru care nu se mai pot face operaţii?

Problem of the week no. 148
Call a point in the Cartesian plane with integer coordinates a *lattice point*. Given a finite set S of lattice points we repeatedly perform the following operation: given two distinct lattice points A, B in S and two distinct lattice points C, D not in S such that $ACBD$ is a parallelogram with $AB > CD$, we replace A, B by C, D. Show that only finitely many such operations can be performed.

Joe Benton, Short List RMM, 2018

A solution can be found on page 4 here.