Problema săptămânii 147
Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, definim *suma de puteri a* lui n astfel: pentru fiecare divizor prim p al lui n, considerăm cel mai mare număr natural k pentru care $p^k \leq n$ şi facem suma tuturor p^k-urilor. (De exemplu, suma de puteri a numărului 100 este $2^6 + 5^2 = 89$.) Demonstraţi că există o infinitate de numere naturale n, $n > 1$, pentru care suma de puteri a lui n este mai mare decât n.

Concursul Kürschak, 1985

Soluţia 1: (*Ervin Macić*)
Fie $n = 2^{2k} + 2$, $k \in \mathbb{N}^*$. Suma de puteri a lui n este cel puţin $2^{2k} + 3$.

Soluţia 2: (*David Andrei Anghel*)
Orice multiplu de 30 are proprietatea dorită. Într-adevăr, dacă $30 \mid n$ şi x, y, z sunt numere naturale astfel încât $2^x \leq n < 2^{x+1}$, $3^y \leq n < 3^{y+1}$, $5^z \leq n < 5^{z+1}$, suma de puteri a lui n este cel puţin $2^x + 3^y + 5^z > \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{5} > n$.

Soluţia 3: (*Lucia Rîşnoveanu, Daniel Văcaru*)
Fie p un număr prim impar şi $n = 2p^a$, $\in \mathbb{N}^*$. Dacă $2^x \leq n < 2^{x+1}$, atunci $2^x > p^a$, deci suma de puteri a lui n este $2^x + p^a > 2 \cdot p^a = n$.

Soluţia 4: (*Radu Lecoiu*)
Fie $n = 2^k \cdot 3$. Dacă x este astfel încât $3^x < 2^k \cdot 3 < 3^{x+1}$, atunci suma de puteri a lui n este $2^{k+1} + 3^x > 2^k \cdot 3 = n$.

Problem of the week no. 147
For every $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, define the *power sum* of n as follows: for every prime divisor p of n, consider the largest positive integer k for which $p^k \leq n$, and sum up all the p^k's. (For instance, the power sum of 100 is $2^6 + 5^2 = 89$.) Prove that the power sum of n is larger than n for infinitely many positive integers n.

Kürschak Competition, 1985

Solution 1: (*Ervin Macić*)
Just consider $2^{2k} + 2$, $k \in \mathbb{N}$. The power sum is at least $2^{2k} + 3$ so we are done.

Solution 2: (*David Andrei Anghel*)
Any multiple of 30 will do. Indeed, if $30 \mid n$, and x, y, z are positive integers such that $2^x \leq n < 2^{x+1}$, $3^y \leq n < 3^{y+1}$, $5^z \leq n < 5^{z+1}$, the power sum of n is at least $2^x + 3^y + 5^z > \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{5} > n$.

Solution 3: (*Lucia Rîşnoveanu, Daniel Văcaru*)
Let p be an odd prime, and $n = 2p^a$, $\in \mathbb{N}$. If $2^x \leq n < 2^{x+1}$, then $2^x > p^a$, which means that the power sum of n is $2^x + p^a > 2 \cdot p^a = n$.

Solution 4: (*Radu Lecoiu*)
Let $n = 2^k \cdot 3$. If $x \in \mathbb{N}$ is such that $3^x < 2^k \cdot 3 < 3^{x+1}$, then the power sum of n is $2^{k+1} + 3^x > 2^k \cdot 3 = n$.