Problema săptămânii 146

Dacă $a, b, c \in [0,1]$, demonstraţi inegalităţile:

a) $\dfrac{a}{1+bc} + \dfrac{b}{1+ca} + \dfrac{c}{1+ab} \leq 2$, (D. Fomin, Kvant, 1990)

b) $\dfrac{a}{1+bc} + \dfrac{b}{1+ca} + \dfrac{c}{1+ab} + \dfrac{1}{2}abc \leq 2$.

Soluţie:

a) Avem $\dfrac{a}{1+bc} \leq \dfrac{2a}{a+b+c} \Leftrightarrow a+b+c \leq 2+2bc$. Această inegalitate rezultă din adunarea inegalităţilor evidente $1+bc \geq b+c$, $1 \geq a$ şi $bc \geq 0$. Adunată cu analoagele, inegalitatea de mai sus o implică pe cea de la a). Egalitatea are loc atunci când două dintre variabile sunt egale cu 1, iar cea de-a treia este 0.

Altă soluţie: (NaPrai, AoPS)

Datorită simetriei, putem presupune că $a \geq b \geq c$. Atunci

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 1 + \frac{b}{bc+1} + \frac{c}{bc+1} \leq 2,$$

unde ultima inegalitate rezultă din $(b-1)(c-1) \geq 0 \Rightarrow \dfrac{b+c}{bc+1} \leq 1$.

Alte demonstraţii şi remarci se pot găsi în nota publicată în RMT nr. 2/2015, notă reprodusă în finalul prezentului material.

b) (User luofangxiang, AoPS)

Inegalitatea se scrie echivalent $a+b+c+\dfrac{1}{2}abc \leq 2+abc\left(\dfrac{1}{1+bc} + \dfrac{1}{1+ca} + \dfrac{1}{1+ab}\right)$.

Cum $\dfrac{1}{1+bc} + \dfrac{1}{1+ca} + \dfrac{1}{1+ab} \geq \dfrac{9}{3+ab+bc+ca} \geq \dfrac{9}{3+3} = \dfrac{3}{2}$, este suficient să demonstrăm că $a+b+c+ \leq 2+abc$. Această inegalitate rezultă din adunarea inegalităţilor $1+a\cdot bc \geq a+bc$ şi $1+bc \geq b+c$, variante ale inegalităţii $(1-x)(1-y) \geq 0$, $\forall x, y \in [0,1]$.

Egalitatea are loc când două dintre variabile sunt egale cu 1 şi cea de-a treia este 0, sau toate trei sunt egale cu 1.

Altă demonstraţie pentru b), dată de *Marius Valentin Drăgoi*

Putem presupune $a \geq b \geq c$. Atunci $\dfrac{abc}{2} \leq \dfrac{abc}{1+bc} \leq \dfrac{bc}{1+bc}$, deci $\dfrac{a}{1+bc} + \dfrac{b}{1+ca} + \dfrac{c}{1+ab} + \dfrac{1}{2}abc \leq \dfrac{a}{1+bc} + \dfrac{b}{1+bc} + \dfrac{c}{1+bc} + \dfrac{bc}{1+bc}$, deci este suficient să demonstrăm că $a+b+c+bc \leq 2+2bc$, adică $a+b+c \leq 1+bc$. Ori $b+c \leq 1+bc \Leftrightarrow (1-b)(1-c) \geq 0$ şi $a \leq 1$ implică inegalitatea dorită.

Altă demonstraţie pentru b), dată de *Bianca Pitu*:

Avem $\dfrac{a}{1+bc} + \dfrac{b}{1+ca} + \dfrac{c}{1+ab} + \dfrac{1}{2}abc \leq \dfrac{a}{1+abc} + \dfrac{b}{1+abc} + \dfrac{c}{1+abc} + \dfrac{1}{2}abc$, deci

este suficient să demonstrăm că $\frac{a+b+c}{1+abc}+\frac{abc}{2}\leq 2$, adică $a^2b^2c^2-3abc+2a+2b+2c-4\leq 0$, $\forall\, a,b,c\in[0,1]$.
Cum $a^2b^2c^2\leq abc$, este suficient să demonstrăm inegalitatea $a+b+c+\leq 2+abc$. De aici Bianca finalizează ca în prima soluţie.

Altă demonstraţie pentru b), la nivel de clasa a IX-a, dată de *Daniel Văcaru*:
Avem $\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}+\frac{1}{2}abc\leq\frac{a}{1+abc}+\frac{b}{1+abc}+\frac{c}{1+abc}+\frac{1}{2}abc$, deci este suficient să demonstrăm că $\frac{a+b+c}{1+abc}+\frac{abc}{2}\leq 2$, adică $a^2b^2c^2-3abc+2a+2b+2c-4\leq 0$, $\forall\, a,b,c\in[0,1]$. Privită ca o funcţie de gradul II în c, expresia din membrul stâng îşi atinge valoarea maximă pe $[0,1]$ în 0 sau în 1. Valoarea ei pentru $c=0$ este $2b+2c-4\leq 0$, iar cea pentru $c=1$ este $a^2b^2-3ab+2a+2b-2$, care poate fi privită ca o funcţie de gradul II în b. Pentru $b=0$ ea are valoareaa $2a-2\leq 0$, iar pentru $b=1$ are valoarea $a^2-a\leq 0$, deci este mereu negativă.

Altă demonstraţie, la nivel de clasa a XI-a, dată de *Flavia Muntean*:
Dacă privim expresia din membrul stâng ca pe o funcţie în a, ea este convexă, deci, pentru fiecare b şi c fixaţi, ea îşi atinge maximul când $a=0$ sau când $a=1$. Analog, pentru b şi c, deci membrul stâng îşi atinge maximul când toate variabilele iau valori în $\{0,1\}$. Comparând aceste valori se obţine concluzia.

Am mai primt soluţii de la Lucia Rîşnoveanu, Luca Pană, Radu Lecoiu şi David Andrei Anghel.

Problem of the week no. 146
If $a,b,c\in[0,1]$, prove the inequalities:

a) $\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\leq 2$, (D. Fomin, Kvant, 1990)

b) $\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}+\frac{1}{2}abc\leq 2$.

Solution:
a) We have $\frac{a}{1+bc}\leq\frac{2a}{a+b+c}\Leftrightarrow a+b+c\leq 2+2bc$. This inequality follows from adding the obvious inequalities $1+bc\geq b+c$, $1\geq a$ and $bc\geq 0$. This, together with two similar inequalities, leads to the one from a). Equality holds when two of the variables are equal to 1, and the third one is 0.

Another solution: (NaPrai, AoPS)
Due to symmetry, we may assume WLOG that $a\geq b\geq c$. So,

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1}\leq 1+\frac{b}{bc+1}+\frac{c}{bc+1}\leq 2,$$

where the last inequality holds true because $(b-1)(c-1)\geq 0\Rightarrow\frac{b+c}{bc+1}\leq 1$.

b) (User luofangxiang, AoPS)
The inequality can be written equivalently

$$a+b+c+\frac{1}{2}abc \leq 2+abc\left(\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}+\frac{1}{1+ab}\right).$$

As $\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}+\frac{1}{1+ab} \geq \frac{9}{3+ab+bc+ca} \geq \frac{9}{3+3} = \frac{3}{2}$, it is sufficient to prove that $a+b+c+ \leq 2+abc$. This follows from adding $1+a\cdot bc \geq a+bc$ and $1+bc \geq b+c$, instances of the inequality $(1-x)(1-y) \geq 0$, $\forall\, x, y \in [0,1]$.
Equality holds when two of the variables are equal to 1, and the third one is 0, or all three are equal to 1.

O INEGALITATE PE DOUĂ INTERVALE

de ANDREI ECKSTEIN, TIMIŞOARA

În această scurtă notă vom demonstra un fapt care, fără să fie unul remarabil, ni s-a părut totuşi interesant: inegalitatea

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\leq 2$$

I. are loc pentru orice $a,b,c\in[0,1]$; [1]
II. are loc pentru orice $a,b,c\in[1,2]$;
III. dar nu are loc pentru orice $a,b,c\in[0,2]$.

Inegalitatea **I.** se găseşte în [1] şi [2] şi se poate demonstra astfel (în [2] sunt prezentate alte două demonstraţii):

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\leq\frac{a}{1+abc}+\frac{b}{1+bca}+\frac{c}{1+cab}=\frac{a+b+c}{1+abc}\leq 2,$$

ultima inegalitate obţinându-se prin adunarea inegalităţilor (evidente):
$a(1-b)(1-c)\geq 0,\ \ (1-a)(1-b)\geq 0,\ \ (1-a)(1-c)\geq 0$ şi $abc\geq 0$.
Egalitatea are loc dacă două dintre variabilele a,b,c sunt egale cu 1, iar cea de-a treia cu 0.

O altă cale de a demonstra inegalitatea $a+b+c\leq 2+2abc,\ \forall\, a,b,c\in[0,1]\quad(*)$ este de a considera, pentru $b,c\in[0,1]$ fixaţi, funcţia $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(1-2bc)x+b+c-2$. Această funcţie îşi atinge maximul la unul din capetele intervalului, deci este suficient să demonstrăm că $f(0)\leq 0$ şi $f(1)\leq 0$ pentru a deduce că $f(a)\leq 0,\ \forall\, a\in[0,1]$, adică inegalitatea $(*)$. Ori $f(0)=(b-1)+(c-1)\leq 0$, iar $f(1)=-bc-(1-b)(1-c)\leq 0$. Analog se poate demonstra şi inegalitatea $a+b+c\leq 2+abc,\ \forall\, a,b,c\in[0,1]$, mai tare decât $(*)$.

Pentru demonstrarea inegalităţii în cazul **II.** folosim că $1+bc\geq b+c$ şi analoagele, inegalitate echivalentă cu $(b-1)(c-1)\geq 0$. Atunci: $\dfrac{a}{1+bc}+\dfrac{b}{1+ca}+\dfrac{c}{1+ab}\leq\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\leq 2$, ultima inegalitate fiind cunoscută pentru a,b,c lungimi de laturi de triunghi (chiar şi degenerat), în particular pentru $a,b,c\in[1,2]$.
Pentru a o demonstra, putem presupune că $a\leq b\leq c$.
Atunci $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\leq\dfrac{a}{b+a}+\dfrac{b}{b+a}+\dfrac{c}{a+b}=1+\dfrac{c}{a+b}\leq 2.$

Demonstrând inegalitatea pentru $a,b,c\in[0,1]$ şi pentru $a,b,c\in[1,2]$, ne putem pune întrebarea naturală: „*Este inegalitatea adevărată pentru orice* $a,b,c\in[0,2]$?”
Răspunsul este negativ, aşa cum se vede alegând de exemplu $a=0$, $b=c=2$.

[1] în această formă inegalitatea a fost dată la Olimpiadă în Leningrad în 1990

În încheiere vă semnalăm câteva inegalităţi asemănătoare pe care vi le propunem spre rezolvare:

1. Determinaţi maximul expresiei $\dfrac{a}{bcd+1}+\dfrac{b}{cda+1}+\dfrac{c}{dab+1}+\dfrac{d}{abc+1}$, unde $a,b,c,d\in[0,1]$.

Đàm Văn Nhỉ, Mathscope, problema 235.3

2. Demonstraţi că $\dfrac{a^2}{a^2+bc}+\dfrac{b^2}{b^2+ca}+\dfrac{c^2}{c^2+ab}\leq 2$, $\forall\, a,b,c>0$.

Olimpiadă Canada

3. Demonstraţi sau infirmaţi: dacă $a,b,c\geq 0$ satisfac $a^2+b^2+c^2=1$, atunci

$$1\leq \frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\leq\sqrt{2}.$$

Faruk Zejnulahi, Šefket Arslanagić, Crux Mathematicorum, problema 2608

4. Demonstraţi că dacă $a,b,c\in[0,1]$ atunci

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}+abc\leq\frac{5}{2}.$$

Vasile Pop, Cluj-Napoca, Lista scurtă ONM 2007

5. Maximul funcţiei $f:[0,1]^n\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum\frac{x_k}{1+(x_1\cdots x_n)/x_k}+x_1\cdots x_n$$

este 2 pentru $n=2$, $\dfrac{5}{2}$ dacă $n=3$ (problema **4.**) şi $n-1$ dacă $n\geq 4$.

David Harutyunyan, Erevan (Armenia) lista lungă, Concursul IMC, 2005

BIBLIOGRAFIE

[1] **M. O. Drîmbe** – *Inegalităţi - idei şi metode*, Editura GIL, 2003, pag. 88

[2] **L. Panaitopol, V. Băndilă, M. Lascu** – *Inegalităţi*, Editura GIL, 1996, pag. 59