(JBMO TST Day 1 Problem 4). 2016?

Fie triunghiul ABC înscris într-un cerc de centru O. Bisectoarea unghiului A intersectează BC în D şi cercul circumscris triunghiului ABC în E. Fie A' simetricul lui A faţă de O, iar K, L centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD, respectiv ACD. Arătaţi că punctele K, L, E şi A' sunt conciclice. (sursa: aici)

Given triangle ABC inscribed in circle (O). The bisector of angle A meets BC at D and meets (O) at E. Let A' be the reflection of A through O, K, L be the circumcenters of triangles ABD, ACD, respectively. Prove that K, L, E, A' are concyclic.

Soluţie:
KL, linia centrelor, este perpendiculară pe coarda comună $[AD]$. Dar cum $[AA']$ e diametru în cercul circumscris, $m(\sphericalangle AEA') = 90°$, deci $EA' \perp AA'$. Rezultă că $EA' \parallel KL$, deci, pentru ca punctele K, L, E, A' să fie conciclice, trebuie ca ele să fie vârfurile unui trapez isoscel sau ale unui dreptunghi. Cum O este pe mediatoarea lui $[EA']$, este necesar şi suficient să demonstrăm că O este şi pe mediatoarea lui $[KL]$, adică $OK = OL$.

KO este mediatoarea lui $[AB]$, iar LO cea a lui $[AC]$. Un calcul simplu de unghiuri arată că patrulaterul $AKOL$ este inscriptibil. Într-adevăr, $m(\sphericalangle AKO) = 180° - \frac{1}{2}m(\sphericalangle AKB) = 180° - m(\sphericalangle ADB) = m(\sphericalangle ADC) = 180° - \frac{1}{2}m(\sphericalangle ALC) = 180° - m(\sphericalangle ALO)$. Cum $m(\sphericalangle KAO) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle OAL)$, coardele $[OK]$ şi $[OL]$ sunt congruente fiind subîntinse de unghiuri congruente.

Vă sfătuiesc să citiţi şi soluţia de la adresa indicată. Este mai complicată dar surprinde şi alte aspecte interesante ale configuraţiei.

Altă problemă dată la barajul pentru JBMO în 2016

Fie k un număr natural fixat. Demonstraţi că există $x, y \in \mathbb{Z}$, nicicare divizibil cu 3, astfel încât $x^2 + 2y^2 = 3^k$.

Given $k \in \mathbb{Z}^+$. Prove that there are $x, y \in \mathbb{Z}$, none of which are divisible by 3 such that $x^2 + 2y^2 = 3^k$. (See here).

Dacă $x^2+2y^2 = 3^k$, atunci $2(x-y)^2+(x+2y)^2 = 2x^2-4xy+2y^2+x^2+4xy+4y^2 = 3x^2 + 6y^2 = 3^{k+1}$ şi, analog, $2(x + y)^2 + (x - 2y)^2 = 3x^2 + 6y^2 = 3^{k+1}$. Dacă x şi y nu sunt divizibile cu 3, atunci $x - y$ şi $x + y$ nu pot fi ambele divizibile cu 3. Dintre cele două relaţii deduse mai sus o folosim atunci pe cea care conţine $x \pm y$ nedivizibil cu 3. Să mai observăm că $x \mp 2y \equiv x \pm y \pmod 3$, deci şi $x \mp 2y$ e tot nedivizibil cu 3.