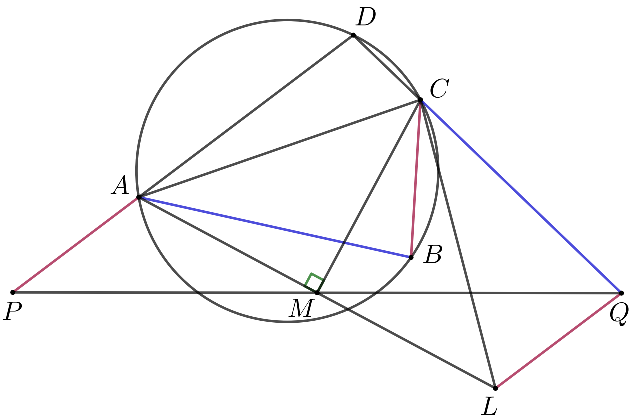
Problema săptămânii 145
Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Segmentele $[DA]$ şi $[DC]$ se prelungesc cu segmentele $[AP] \equiv [BC]$ şi $[CQ] \equiv [AB]$. Dacă M este mijlocul segmentului $[PQ]$, demonstraţi că $MA \perp MC$.

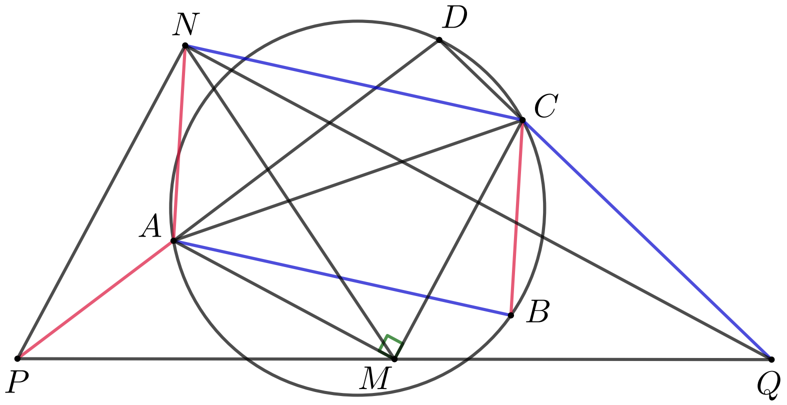
Olimpiadă Hong Kong, 2017

Soluţia 1: (*Lucia Rîşnoveanu*)
Fie L simetricul lui A faţă de M. Atunci $AQLP$ este paralelogram, deci $AP = QL = CB$.
Din $QL \parallel AD$ rezultă că $m(\sphericalangle CQL) = 180° - m(\sphericalangle ADC)$. Pe de altă parte, $ABCD$ - inscriptibil implică $m(\sphericalangle ABC) = 180° - m(\sphericalangle ADC)$, deci $m(\sphericalangle CQL) = m(\sphericalangle ABC)$. Cum $CQ = AB$ şi $QL = BC$, rezultă că triunghiurile CQL şi ABC sunt congruente (LUL), deci $AC = CL$. În triunghiul isoscel ACL, $[CM]$ este mediană, deci este şi înălţime, de unde concluzia.



Soluţia 2: (*Bianca Pitu*, clasa a IX-a)
Fie N mijlocul lui $[AC]$. Atunci $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CQ})$, deci $NM^2 = \frac{1}{4}(AP^2 + CQ^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CQ}) = \frac{1}{4}(AP^2 + CQ^2 + 2 \cdot AP \cdot CQ \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{CQ}})) = \frac{1}{4}(AP^2 + CQ^2 + 2 \cdot AP \cdot CQ \cdot \cos \widehat{ADC}) = \frac{1}{4}(BC^2 + BA^2 - 2 \cdot BC \cdot BA \cdot \cos \widehat{ABC}) = \frac{1}{4} AC^2$, deci $MN = \frac{1}{2} AC$, prin urmare triunghiul AMC este dreptunghic.

Soluţia 3: (*Luca Pană*, schiţă)
Fie N astfel încât $ABCN$ să fie paralelogram. Un calcul de unghiuri (care depinde de ordinea relativă a măsurilor unghiurilr patrulaterului) arată că $m(\sphericalangle PNQ) = 90°$. Atunci $NM = PM$ şi $NA = NP$ arată că MA este mediatoarea lui $[NP]$. Analog, MC este mediatoarea lui $[NQ]$. Cu $NP \perp NQ$, rezultă că $MA \perp MC$.



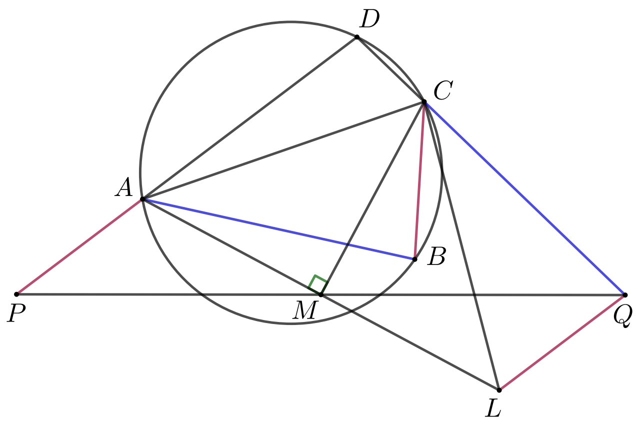
Remarcă: (*David Andrei Anghel*)
Are loc şi reciproca: dacă $AM \perp MC$, atunci $ABCD$ este inscriptibil.

Am mai primit soluţii (calculatorii) şi de la: Radu Lecoiu, David Andrei Anghel şi Daniel Văcaru.

Problem of the week no. 145
Suppose $ABCD$ is a cyclic quadrilateral. Produce DA and DC to P and Q respectively such that $AP = BC$ and $CQ = AB$. Let M be the midpoint of PQ. Show that $MA \perp MC$.

Hong Kong Olympiad, 2017

Solution: (*Lucia Rîşnoveanu*)
Let L be the reflection of point A with respect to M. Then $AQLP$ is a parallelogram, hence $AP = QL = CB$.
From $QL \parallel AD$ it follows that $\sphericalangle CQL = 180° - \sphericalangle ADC$. On the other hand, $ABCD$ is cyclic, therefore $\sphericalangle ABC = 180° - \sphericalangle ADC$, and thus $\sphericalangle CQL = \sphericalangle ABC$.
As $CQ = AB$ and $QL = BC$, it follows that triangles CQL ănd ABC are equal (SAS), therefore $AC = CL$. Triangle ACL is isosceles, $[CM]$ is the median corresponding to its basis, therefore it is also the altitude of the triangle, which leads us to the conclusion.



D
C
A
B
P
M
Q
L