Problema săptămânii 143
Demonstraţi că, pentru orice număr natural n, toţi divizorii numărului $\underbrace{111\ldots1}_{5^n}$ au ultima cifră 1.

KöMaL

Soluţie:
Este suficient să demonstrăm că orice divizor prim are ultima cifră 1. Dacă numărul prim p este divizor al numărului $N = \dfrac{10^{5^n}-1}{9}$, atunci $10^{5^n} \equiv 1 \pmod{p}$. Dacă k este cel mai mic număr natural nenul pentru care $10^k \equiv 1 \pmod{p}$, atunci $k \mid 5^n$. Deoarece suma cifrelor lui N, 5^n, nu este divizibilă cu 3, nu este posibil ca $p = 3$, prin urmare $k > 1$, deci $5 \mid k$. Din mica teoremă a lui Fermat rezultă că $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, deoarece $(p, 10) = 1$. Atunci $k \mid p-1$, adică $p-1$ este divizibil cu 5. Cum p este impar, $p-1$ este divizibil cu 2, deci şi cu 10, ceea ce demonstrează afirmaţia făcută.

Problem of the week no. 143
Prove that, for all positive integers n, every factor of $\underbrace{111\ldots1}_{5^n}$ ends in the digit 1.

KöMaL

Solution:
It is sufficient to prove that every prime factor of $\underbrace{111\ldots1}_{5^n}$ ends in the digit 1. If p is a prime divisor of $N = \dfrac{10^{5^n}-1}{9}$, then $10^{5^n} \equiv 1 \pmod{p}$. If k is the smallest positive integer such that $10^k \equiv 1 \pmod{p}$, then $k \mid 5^n$. The sum of the digits of N is 5^n, not a multiple of 3, therefore $p \neq 3$, hence $k > 1$, i.e. $5 \mid k$. From Fermat's Little Theorem it follows that $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, because $(p, 10) = 1$. Then $k \mid p-1$, hence $p-1$ is a multiple of 5. But p is odd, i.e. $p-1$ is divisible by 2, therefore also by 10, which proves the statement.