Problema săptămânii 142
Se dau n numere reale, nu toate nule, dar având suma nulă. Arătaţi că putem nota aceste numere cu a_1, a_2, ..., a_n astfel încât

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 < 0.$$

Soluţie:
Pentru $n = 1$ ipoteza nu are loc. Pentru $n = 2$, numerele trebuie să fie nenule şi opuse şi atunci $a_1a_2 + a_2a_1 = -2a_1^2 < 0$. În continuare presupunem $n \geq 3$. Fie $b_1, b_2, \ldots, b_n$ cele n numere scrise într-o ordine oarecare.
Vom demonstra afirmaţia din enunţ prin reducere la absurd.
Presupunând concluzia falsă, ar rezulta că, în orice ordine am aranja numerele $b_1, b_2, \ldots, b_n$, am avea $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 \geq 0$.
Sunt $n!$ moduri de a aranja numerele deci obţinem $n!$ asemenea relaţii pe care le adunăm. Deoarece fiecare termen de forma b_ib_j cu $i \neq j$ apare de acelaşi număr de ori (număr despre care se poate vedea uşor că este egal cu $(n-2)! \cdot 2n$), obţinem că $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} b_ib_j \geq 0$, deci

$$0 = (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2 = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_ib_j > 0,$$

ceea ce reprezintă o contradicţie. Ultima inegalitate este strictă deoarece numerele $b_1, b_2, \ldots, b_n$ nu sunt toate nule, deci $b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 > 0$.

Problem of the week no. 142
Suppose one is given n real numbers, not all zero, but such that their sum is zero. Prove that one can label these numbers a_1, a_2, ..., a_n in such a manner that

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 < 0.$$

Solution:
For $n = 1$ the hypothesis is not satisfied. For $n = 2$, the numbers have to be non-zero and opposite, so $a_1a_2 + a_2a_1 = -2a_1^2 < 0$. In what follows, we assume $n \geq 3$. Let $b_1, b_2, \ldots, b_n$ be the n numbers written in some order.
Assume the conclusion does not hold.
This would mean that in whatever order we arrange the numbers $b_1, b_2, \ldots, b_n$, we would have $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 \geq 0$.
There are $n!$ ways of arranging the numbers, therefore we obtain $n!$ such inequalities. We add them. Because each term b_ib_j with $i \neq j$ appears the same number of times (actually $(n-2)! \cdot 2n$ times), we obtain that $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} b_ib_j \geq 0$, i.e.

$$0 = (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2 = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_ib_j > 0,$$

which represents a contradiction. The last inequality is strict because numbers $b_1, b_2, \ldots, b_n$ are not all zero, hence $b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 > 0$.