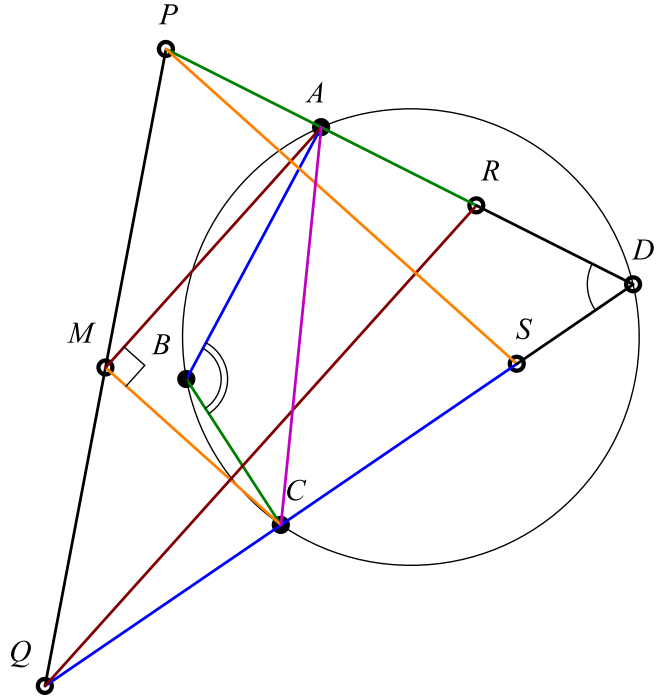
Problema săptămânii 145:

Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Segmentele $[DA]$ şi $[DC]$ se prelungesc cu segmentele $[AP]\equiv[BC]$ şi $[CQ]\equiv[AB]$. Dacă $M-$ este mijlocul segmentului $[PQ]$, arătaţi că: $MA\perp MC$.



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): Notând cu: $a=|AB|=|CD|=|CS|, b=|BC|=|AP|=|AR|, c=|CD|,$ $d=|DA|$; iar cu: $R=S_A(P)$ şi $S=S_C(Q)$, avem:

$$\left.\begin{matrix}[MA]\equiv[MB]\\ [CA]\equiv[CR]\end{matrix}\right\}\Rightarrow|MA|=\frac{1}{2}\cdot|QR|;\quad(1)\quad \text{şi}\quad \left.\begin{matrix}[MA]\equiv[MB]\\ [CQ]\equiv[CS]\end{matrix}\right\}\Rightarrow|MC|=\frac{1}{2}\cdot|PS|.\quad(2)$$

Folosind acum teorema cosinului în triunghiurile DRQ, DPS, DAC şi ABC, în cazul fig. noastre $\left[D=m\left(\widehat{CDA}\right)<90^0 \text{şi } B=m\left(\widehat{ABC}\right)>90^0\right]$, obţinem că:

$$|QR|^2=|DQ|^2+|DR|^2-2\cdot|DQ|\cdot|DR|\cdot\cos D=(a+c)^2+(d-b)^2-2\cdot(a+c)\cdot(d-b)\cdot\cos D;\quad(3)$$

$$|SP|^2=|DS|^2+|DP|^2-2\cdot|DS|\cdot|DP|\cdot\cos D=(c-a)^2+(d+b)^2-2\cdot(c-a)\cdot(d+b)\cdot\cos D;\quad(4)$$

$$|AC|^2=|DC|^2+|DA|^2-2\cdot|DC|\cdot|DA|\cdot\cos D=c^2+d^2-2cd\cdot\cos D;\quad(5)$$

$$\left.\begin{matrix}|AC|^2=|BC|^2+|BA|^2+2\cdot|BC|\cdot|BA|\cdot\cos(180^0-B)\\ ABCD-inscriptibil\Leftrightarrow D=180^0-B\end{matrix}\right\}\Rightarrow|AC|^2=a^2+b^2+2ab\cdot\cos D.\quad(6)$$

În fine, ţinând acum seama de relaţiile (1)-(6), obţinem că: $|MA|^2+|MC|^2=\frac{1}{4}.\left(|QR|^2+|PS|^2\right)=$

$$=\frac{1}{4}.\left[(a+c)^2+(d-b)^2-2\cdot(a+c)\cdot(d-b)\cdot\cos D+(c-a)^2+(d+b)^2-2\cdot(c-a)\cdot(d+b)\cdot\cos D\right]-$$

$$=\frac{1}{4}.\left\{\left[(a+c)^2+(c-a)^2\right]+\left[(d-b)^2+(d+b)^2\right]-2\cdot\left[(a+c)\cdot(d-b)+(c-a)\cdot(d+b)\right]\cdot\cos D\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)-(\cancel{ad}-ab+cd-\cancel{bc}+cd+\cancel{bc}-\cancel{ad}-ab)\cdot\cos D\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)+2\cdot(ab-cd)\cdot\cos D\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(a^2+b^2+2ab\cdot\cos D\right)+\left(c^2+d^2-2cd\cdot\cos D\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(|AC|^2+|AC|^2\right)=|AC|^2\Rightarrow\boxed{|MA|^2+|MC|^2=|AC|^2\Leftrightarrow MA\perp MC}.\ \blacksquare$$