Olimpiada Naţională de Matematică
Al cincilea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori, Bucureşti, 30 mai 2019

Problema 1. Dacă a, b, c sunt numere reale cu proprietatea că $ab + bc + ca = 0$, demonstraţi că $2(a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 27a^2b^2c^2$.
Când are loc egalitatea?

Leonard Giugiuc

Soluţie:
Inegalitatea se scrie $2(a^4b^2 + a^4c^2 + b^4a^2 + b^2c^2 + c^4a^2 + c^4b^2) \geq 21a^2b^2c^2$.
Dacă $abc = 0$, nu avem ce demonstra. În acest caz, trebuie ca două dintre variabile să fie 0, iar inegalitatea din enunţ este satisfăcută cu egalitate.
Dacă $abc \neq 0$, împărţim cu $a^2b^2c^2$ şi ajungem la

$$2\left[\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2}\right) + \left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}\right)\right] \geq 21,$$

deci la $\dfrac{a^2b^2 + a^2c^2}{b^2c^2} + \dfrac{a^2b^2 + b^2c^2}{a^2c^2} + \dfrac{a^2c^2 + b^2c^2}{a^2b^2} \geq \dfrac{21}{2}$. Notând $ab = x$, $bc = y$, $ca = z$, ştim că $x + y + z = 0$ şi vrem să demonstrăm că $\dfrac{x^2 + y^2}{z^2} + \dfrac{y^2 + z^2}{x^2} + \dfrac{z^2 + x^2}{y^2} \geq \dfrac{21}{2}$.
Este evident că două dintre numerele x, y, z au un semn, iar cel de-al treilea semn contrar. Putem presupune $xy > 0$. Înlocuind $z = -x - y$, inegalitatea de demonstrat se scrie $\dfrac{x^2 + y^2}{(x + y)^2} + \dfrac{x^2 + 2xy + 2y^2}{x^2} + \dfrac{y^2 + 2xy + 2x^2}{y^2} \geq \dfrac{21}{2}$, sau încă $\dfrac{x^2 + y^2}{(x + y)^2} + 2\left(\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2}\right) + 2\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) \geq \dfrac{17}{2}$.
Dar inegalităţile evidente $\dfrac{x^2 + y^2}{(x + y)^2} \geq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} \geq 2$ şi $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$ (toate satisfăcute cu egalitate dacă $x = y$), implică prin adunare inegalitatea de mai sus.
În acest caz, avem egalitate dacă $ab = ac$ şi $ab + bc + ca = 0$, adică dacă $b = c = -2a$.
În concluzie, egalitate avem pentru tripletele $(\alpha, -2\alpha, -2\alpha)$, $(\alpha, 0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, şi pentru cele obţinute prin permutarea componentelor acestora.

Problema 2. Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care $4k^2 + n$ este număr prim pentru orice număr natural k mai mic decât n.

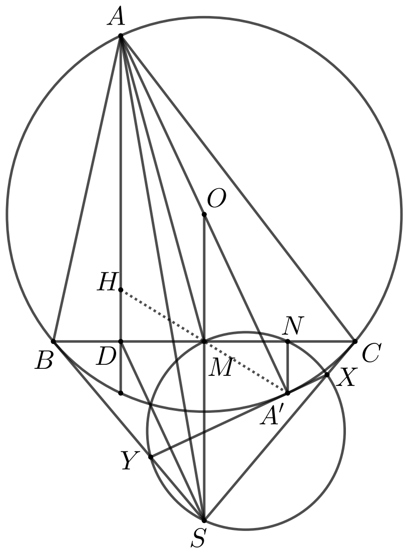
Soluţie:
Pentru $k = 0$ rezultă că n trebuie să fie prim. Se verifică uşor că $n = 3$ şi $n = 7$ au proprietatea din enunţ în vreme ce $n = 2$ şi $n = 5$ nu o au. Demonstrăm că niciun $n > 10$ nu are proprietatea din enunţ.
Dacă $n = 4m + 1$, alegând $k = m < n$ obţinem un număr compus, $(2m + 1)^2$. Aşadar, există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = 4m - 1$. Dacă m are un divizor impar mai

mare ca 1, d, alegând $2k-1=d$ obţinem că $4k^2+4m-1=(2k-1)(2k+1)+4m$ este divizibil cu d şi mai mare ca d, deci este număr compus.
Rămâne cazul în care $n=2^u-1$ (m este putere a lui 2), $u \geq 4$. Dacă u este compus, n are un divizor propriu de forma 2^a-1 şi putem lua $k=2^a-1$.
Dacă $u=4j+1$, atunci pentru $k=1$ se obţine $2^{4j+1}+3=M_5$, $2^{4j+1}+3>5$, deci număr compus.
Dacă $u=4j+3$, $j \in \mathbb{N}^*$, atunci pentru $k=2^{2j-1}$ avem $4k^2+n=2^{4j}+2^{4j+3}-1=(3\cdot 4^j)^2-1=(3\cdot 4^j-1)(3\cdot 4^j+1)$, adică număr compus.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care $AB<AC$, D este piciorul înălţimii din A, H este ortocentrul, O este centrul cercului circumscris, M este mijlocul laturii $[BC]$, A' este simetricul lui H faţă de M, iar S este intersecţia tangentelor în B şi C la cercul circumscris. Tangenta în A' la cercul circumscris intersectează SC şi SB în X, respectiv Y.
Dacă M, S, X, Y sunt conciclice, demonstraţi că dreptele OD şi SA' sunt paralele.

George Picu

Soluţie:



Fie N al doilea punct de intesecţie a cercului circumscris lui SXY cu BC. Scriind puterile lui B şi C faţă de cercul circumscris patrulaterului $MXSY$, avem $BM \cdot BN = BY \cdot BS$ şi $CN \cdot CM = CX \cdot CS$. Cum $BM = CM$, $BS = CS$, $YB = YA'$ şi $XC = XA'$, rezultă că $\dfrac{BY}{CX} = \dfrac{BY}{CX} = \dfrac{BA'}{CA'}$. Din varianta generalizată a teoremei bisectoarei glisante rezultă că $A'N \parallel SM$, deci N este simetricul lui D faţă de M. În triunghiul SXY, centrul cercului circumscris este pe SN, deci ortocentrul e pe izogonala ei, SD. Rezultă că $SD \perp XY$, adică $SD \parallel AA'$. Atunci $ADSO$ este paralelogram, deci $SD = R$. Atunci şi $SDOA'$ e paralelogram, de unde concluzia.

Remarcă: Alte proprietăţi ale configuraţiei din problemă:
M este centrul cercului circumscris triunghiului OXY. Într-adevăr, cum SM e bisectoarea lui $\angle XSY$, avem $MX = MT$. Cum $m(\angle XMY) = 180° - m(\angle XSY) = 2m(\angle A) = m(\angle BOC) = 2m(\angle XOY)$ şi de aici rezultă concluzia.
$OSA'N$ este trapez isoscel, deci $SN = OA' = R$, deci cercul circumscris triunghiului SXY trece prin M şi N şi are raza egală cu cea a cercului lui Euler a triunghiului ABC, deci este simetricul acestuia faţă de punctul M.

Problema 4. Se dau două mulţimi finite, disjuncte, de numere naturale, A şi B, având n, respectiv m elemente. Se ştie că orice număr natural k care aparţine lui $A \cup B$ satisface cel puţin una din condiţiile $k + 17 \in A$ şi $k - 31 \in B$.
Demonstraţi că $17n = 31m$.

Soluţie:
Pornim de la un $x_1 \in A \cup B$ arbitrar. Dacă $x_1 + 17 \in A$, alegem $x_2 = x_1 + 17$, iar dacă $x_1 + 17 \notin A$, atunci alegem $x_2 = x_1 - 31 \in B$. Continuăm să alegem $x_{j+1} = x_j + 17$ dacă $x_j + 17 \in A$ şi $x_{j+1} = x_j - 31 \in B$ în caz contrar până când obţinem (pentru prima dată) un x_{j+1} care a mai fost (pentru care există $k < j$ astfel încât $x_{j+1} = x_k$). Va exista un asemenea indice j deoarece $A \cup B$ este finită. Să demonstrăm că $x_k = x_1$ (adică $k = 1$). Dacă n-ar fi aşa, $x_j \neq x_{k-1}$ datorită minimalităţii indicelui $j + 1$. Dar atunci avem fie $x_{j+1} = x_j + 17 \in A$ şi $x_k = x_{k-1} - 31 \in B$, fie, invers, $x_{j+1} = x_j - 31 \in B$ şi $x_k = x_{k-1} + 17 \in A$. Cum A şi B sunt disjuncte, nu putem avea $x_{j+1} = x_k$. Aşadar, $x_{j+1} = x_1$. Dacă printre indicii $2, 3, \ldots, j + 1$ există a indici pentru care $x_{m+1} = x_m + 17$ şi deci $b = j - a$ indici pentru care $x_{m+1} = x_m - 31$, atunci adunând toate aceste relaţii obţinem $x_1 = x_1 + a \cdot 17 - b \cdot 31$, adică $17 \cdot a = 31 \cdot b$. În plus, cei a indici pentru care $x_{t+1} = x_t + 17$ sunt tocmai aceia pentru care $x_{t+1} \in A$, în vreme ce indicii pentru care $x_{t+1} = x_t - 31$ sunt cei pentru care $x_{t+1} \in B$. Prin urmare, printre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_j$ sunt a elemente din A şi b elemente din B, cu $17a = 31b$..
Dacă prin acest procedeu nu am epuizat toate elementele lui $A \cup B$, alegem un $y_1 \in A \cup B \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_j\}$ şi definim un nou şir (finit) $y_1, y_2, \ldots, y_s$ unde s este primul indice pentru care $y_s \in \{x_1, x_2, \ldots, x_j, y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}\}$. Dacă $y_s \in A$, atunci $y_s = y_{s-1} + 17$. Dacă $y_s = x_r$, cu $r \in \{1, 2, \ldots, j\}$, atunci $x_r \in A$ implică $x_r = x_{r-1} + 17$ (indicii sunt luaţi modulo j), deci $y_{s-1} = x_{r-1}$, contrazicându-se minimalitatea lui s. De asemenea, dacă $y_s = y_r$ cu $r < s$, dacă $r \neq 1$ rezultă $y_{s-1} = y_s - 17 = y_r - 17 = y_{r-1}$, contrazicându-se minimalitatea lui s. Analog se ajunge la contradicţie în cazul $y_s \in B$. Aşadar, $y_s = y_1$. Aşa cum s-a arătat pentru numerele $x_1, x_2, \ldots, x_j$, se arată şi pentru numerele $y_1, y_2, \ldots, y_s$ că raportul dintre numărul de elemente ale lui A din acest şir şi numărul de elemente ale lui B din acest şir este $\frac{31}{17}$.
Continuăm acest procedeu până epuizăm mulţimea $A \cup B$. Mulţimea $A \cup B$ va fi descompusă în ,,cicluri" disjuncte, în fiecare din ele raportul dintre numărul elementelor din ciclu care îi aparţin lui A şi numărul celor care îi aparţin lui B fiind $\frac{31}{17}$. Atunci şi reunind aceste cicluri, raportul se păstrează.