Olimpiada Naţională de Matematică
Al cincilea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori, Bucureşti, 30 mai 2019

Problema 1. Dacă a, b, c sunt numere reale cu proprietatea că $ab + bc + ca = 0$, demonstraţi că $2(a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 27a^2b^2c^2$.
Când are loc egalitatea?

Problema 2. Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care $4k^2 + n$ este număr prim pentru orice număr natural k mai mic decât n.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care $AB < AC$, D este piciorul înălţimii din A, H este ortocentrul, O este centrul cercului circumscris, M este mijlocul laturii $[BC]$, A' este simetricul lui H faţă de M, iar S este intersecţia tangentelor în B şi C la cercul circumscris. Tangenta în A' la cercul circumscris intersectează SC şi SB în X, respectiv Y.
Dacă M, S, X, Y sunt conciclice, demonstraţi că OD şi SA' sunt paralele.

Problema 4. Se dau două mulţimi finite, disjuncte, de numere naturale, A şi B, având n, respectiv m elemente. Se ştie că orice număr natural k care aparţine lui $A \cup B$ satisface cel puţin una din condiţiile $k + 17 \in A$ şi $k - 31 \in B$.
Demonstraţi că $17n = 31m$.

Timp de lucru: 4 ore