

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Al patrulea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru**  
**Juniori, București, 29 mai 2019**

**Problema 1.** Pentru un număr natural nenul  $m$  notăm cu  $\tau(m)$  numărul divizorilor săi pozitivi, iar cu  $\sigma(m)$  suma acestora.

Determinați numerele naturale nenule  $n$  pentru care

$$n\sqrt{\tau(n)} \leq \sigma(n).$$

*Vlad Mihaly*

**Soluție:**

Se verifică ușor că inegalitatea este satisfăcută de orice  $n \in \{1, 2, 4, 6\}$  și nu este satisfăcută de niciun  $n \in \{3, 5\}$ . Egalitate avem pentru  $n = 1$  și  $n = 6$ . Demonstrăm că inegalitatea nu este satisfăcută de niciun  $n$  mai mare. Este ușor de văzut că  $\tau(a \cdot b) = \tau(a) \cdot \tau(b)$  și  $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$  pentru orice  $a, b \in \mathbb{N}^*$  cu  $(a, b) = 1$ . De aici se vede că dacă  $a, b \in \mathbb{N}^*$  cu  $(a, b) = 1$  nu sunt soluții ale inecuației din enunț, atunci nici produsul lor nu este soluție. Vom demonstra că  $2^k$  nu este soluție pentru niciun  $k > 3$ , că  $p^k$ ,  $2p^k$  și  $4p^k$  nu sunt soluții pentru niciun  $p$  prim,  $p > 2$  și niciun  $k > 0$ . Va rezulta că inecuația din enunț nu are alte soluții în afara celor patru amintite.

•  $2^k \sqrt{\tau(2^k)} > \sigma(2^k) \Leftrightarrow 2^k \sqrt{k+1} > 2^{k+1} - 1$  rezultă de îndată ce  $\sqrt{k+1} \geq 2$ , deci pentru orice  $k \geq 3$ .

•  $p^k \sqrt{\tau(p^k)} > \sigma(p^k) \Leftrightarrow p^k \sqrt{k+1}(p-1) > p^{k+1} - 1$ . Ori  $p^k \sqrt{k+1}(p-1) \geq p^k(p-1)\sqrt{2} > p^{k+1} > p^{k+1} - 1$ , inegalitatea din mijloc fiind echivalentă cu  $p > \sqrt{2} + 2$ , deci adevărată pentru orice  $p \geq 3$ .

•  $2p^k \sqrt{\tau(2p^k)} > \sigma(2p^k) \Leftrightarrow 2p^k \sqrt{2(k+1)}(p-1) > 3(p^{k+1} - 1)$ .

Ori  $2p^k \sqrt{2(k+1)}(p-1) \geq 4p^k(p-1) > 3p^{k+1} > 3(p^{k+1} - 1)$ , inegalitatea din mijloc fiind echivalentă cu  $p > 4$ , deci adevărată pentru orice  $p \geq 5$ . De asemenea, dacă  $p = 3$ , atunci  $k \geq 2$ , deci inegalitatea de demonstrat,  $4 \cdot 3^k \sqrt{2(k+1)} > 3(3^{k+1} - 1)$ , rezultă din  $4 \cdot 3^k \sqrt{2(k+1)} \geq 4\sqrt{6} \cdot 3^k > 3^{k+2} > 3(3^{k+1} - 3)$ .

•  $4p^k \sqrt{\tau(4p^k)} > \sigma(4p^k) \Leftrightarrow 4p^k \sqrt{3(k+1)}(p-1) > 7(p^{k+1} - 1)$ .

Dar  $4p^k \sqrt{3(k+1)}(p-1) \geq 4\sqrt{6} p^k(p-1) > 7p^{k+1} > 7(p^{k+1} - 1)$ , inegalitatea din mijloc rezultând din  $4\sqrt{6}(p-1) > 7p$ , adevărată pentru orice  $p \geq 5$ . Pentru  $p = 3$ , inegalitatea  $8 \cdot 3^k \sqrt{3(k+1)} > 7(3^{k+1} - 1)$  rezultă din  $8 \cdot 3^k \sqrt{3(k+1)} > 7 \cdot 3^{k+1} \Leftrightarrow 8\sqrt{3(k+1)} > 21$ , adevărată pentru  $k \geq 2$ . Pentru  $p = 3$ ,  $k = 1$  se verifică direct că  $n = 12$  nu este soluție.

**Problema 2.** Fie  $a, b, c, d \geq 0$  astfel încât  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ . Demonstrați că

$$\frac{a + b + c + d}{2} \geq 1 + \sqrt{abcd}.$$

Când are loc egalitatea?

*Leonard Giugiuc și Valmir B. Krasniqi*

**Soluția 1:**

Avem  $ab + cd \geq 2\sqrt{abcd}$ ,  $ac + bd \geq 2\sqrt{abcd}$  și  $ad + bc \geq 2\sqrt{abcd}$ , deci  $ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 6\sqrt{abcd}$ , deci este suficient să demonstrăm că

$$\frac{a + b + c + d}{2} \geq 1 + \frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}.$$

Dar  $ab + ac + ad + bc + bd + cd = \frac{(a + b + c + d)^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2}{2} = 2p^2 - 2$ ,

unde am notat cu  $p = \frac{a + b + c + d}{2}$ . Din relația de mai sus este evident că  $p \geq 1$ , iar din inegalitatea dintre media aritmetică și cea pătratică,  $p \leq 2$ . Este suficient să demonstrăm că  $p \geq 1 + \frac{p^2 - 1}{3}$ , adică  $p^2 - 3p + 2 \leq 0$ , sau  $(p - 1)(p - 2) \leq 0$ , ceea ce este evident. Egalitate avem dacă  $p = 2$ , adică avem egalitate în inegalitatea dintre media aritmetică și cea pătratică, deci pentru  $a = b = c = d = 1$  sau dacă  $p = 1$ , ceea ce înseamnă  $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$ , adică trei dintre variabile egale cu 0 și cea de-a patra egală cu 2.

**Soluția 2:**

Prin ridicare la pătrat, inegalitatea se rescrie echivalent  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \geq 4 + 8\sqrt{abcd} + 4abcd$ , adică  $ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 4\sqrt{abcd} + 2abcd$ . Din inegalitatea mediilor,  $4 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} = 4\sqrt{abcd}$ , de unde  $abcd \leq 1$ . Tot din inegalitatea mediilor,  $ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 6\sqrt{abcd} = 4\sqrt{abcd} + 2\sqrt{abcd} \geq 4\sqrt{abcd} + 2abcd$ .

Egalitate avem dacă  $ab = ac = ad = bc = bd = cd$ , adică atunci când  $a = b = c = d = 1$  sau trei dintre variabile sunt 0 (și atunci cea de-a patra este 2).

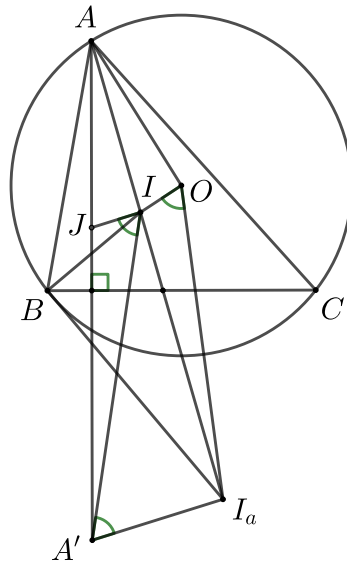
**Problema 3.** În triunghiul ascuțitunghic  $ABC$  punctul  $I$  este centrul cercului înscris,  $O$  este centrul cercului circumscris, iar  $I_a$  este centrul cercului exînscribit tangent laturii  $[BC]$ . Punctul  $A'$  este simetricul vârfului  $A$  față de dreapta  $BC$ . Demonstrați că unghiurile  $\angle IOI_a$  și  $\angle IA'I_a$  sunt congruente.

**Soluție:**

Patrulaterul  $IBI_aC$  este inscriptibil, deci  $\angle AI_aC \equiv \angle IBC \equiv \angle ABI$  și, cum  $\angle BAI \equiv \angle I_aAC$ , rezultă că triunghiurile  $ABI$  și  $AI_aC$  sunt asemenea (UU).

Rezultă că  $AI \cdot AI_a = AB \cdot AC$ . Pe de altă parte,  $AB \cdot AC = \frac{2S}{\sin A} = \frac{a \cdot h_a}{\sin A} = 2R \cdot h_a = AA' \cdot AO$ . Cum  $\angle A'AI \equiv \angle I_aAO$  (pentru că  $AA'$  și  $AO$  sunt izogonale în  $\angle BAC$ ), rezultă că triunghiurile  $AOI_a$  și  $AIA'$  sunt asemenea.

Fie  $J$  punctul în care paralela prin  $I$  la  $I_aA'$  intersectează  $AA'$ . Atunci  $\frac{AJ}{AI} = \frac{AA'}{AI_a} = \frac{AI}{AO}$ , deci triunghiurile  $AJI$  și  $AIO$  sunt asemenea. Rezultă că  $m(\angle IOI_a) = m(\angle AOI_a) - m(\angle AOI) = m(\angle AIA') - m(\angle AIJ) = m(\angle JIA') = m(\angle IA'I_a)$ , de unde concluzia.



**Problema 4.** Pe un cerc se scriu numerele de la 1 la 100 într-o anumită ordine. Spunem despre o pereche de numere de pe cerc că este *bună* dacă cele două nu sunt vecine și dacă pe cel puțin unul din cele două arce de cerc pe care ele le determină se află numai numere mai mici decât fiecare din ele. Cât poate fi numărul total de perechi bune?

**Soluția 1:**

Vom demonstra că numărul perechilor bune este mereu 97.

Vom face anumite modificări asupra ordinii numerelor de pe cerc. Vom arăta că aceste modificări nu schimbă numărul perechilor bune. Mai întâi vom face rocade între numărul 1 și câte unul din vecinii săi până ce numărul 1 ajunge lângă 100. O astfel de rocadă nu schimbă numărul perechilor bune. Într-adevăr, dacă facem rocada între 1 și unul din vecinii săi,  $n$ , toate perechile bune ce nu îl conțin  $n$  rămân bune. În plus, nu există perechi bune care să îl conțină pe 1. Perechile bune care îl conțin pe  $n$  rămân bune, cu excepția perechii care îl conține pe  $n$  și pe celălalt vecin al lui 1. În locul acestei perechi apare perechea bună formată din  $n$  și fostul său vecin diferit de 1. Așadar, în urma efectuării acestei rocade, numărul perechilor bune nu s-a schimbat. Efectuăm astfel de rocade până când 1 ajunge lângă 100.

Vom face apoi rocade între 2 și vecinii săi până când 2 ajunge după 1, astfel încât 1 să fie între 100 și 2. Se arată analog că aceste rocade nu modifică numărul perechilor bune. Se continuă cu efectuarea de astfel de rocade până când se ajunge ca ordinea numerelor pe cerc să fie  $1, 2, 3, \dots, 100$ . Aici se vede ușor că singurele perechi bune sunt  $\{k, 100\}$ , unde  $k \in \{2, 3, \dots, 98\}$ , deci că sunt 97 de perechi bune.

**Soluția 2:** (dată în concurs de *Iustinian Constantinescu*)

Sunt 97 de perechi bune. Vom arăta prin inducție că pentru un cerc cu numerele de la 1 la  $n$  sunt  $n - 3$  perechi bune.

Pentru  $n = 3$  este evident, deoarece toate numerele sunt vecine.

Pentru un cerc cu numerele de la 1 la  $n + 1$ . scoatem numărul 1 și scădem 1 din toate celelalte numere. Toate perechile bune care nu îl conțineau pe 1, cu excepția celei formate din cei doi vecini ai lui 1, rămân bune deoarece dacă un număr era mai mare decât un altul în cercul cu  $n + 1$  numere, el rămâne la fel și în cercul cu  $n$  numere. Analog pentru perechile care nu erau bune și nu îl conțineau pe 1. Perechile care îl conțineau pe 1 nu erau bune și dispar, deci pot fi ignorate. Mai rămâne perechea formată din cei doi vecini ai lui 1 care era bună înainte și nu după, deci numărul de perechi bune în cercul cu  $n + 1$  numere este cu 1 mai mare decât în cercul cu  $n$  numere.