Olimpiada Naţională de Matematică
Al patrulea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori, Bucureşti, 29 mai 2019

Problema 1. Pentru un număr natural nenul m notăm cu $\tau(m)$ numărul divizorilor săi pozitivi, iar cu $\sigma(m)$ suma acestora.
Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care

$$n\sqrt{\tau(n)} \leq \sigma(n).$$

Problema 2. Fie $a, b, c, d \geq 0$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Demonstraţi că

$$\frac{a+b+c+d}{2} \geq 1 + \sqrt{abcd}.$$

Când are loc egalitatea?

Problema 3. În triunghiul ascuţitunghic ABC punctul I este centrul cercului înscris, O este centrul cercului circumscris, iar I_a este centrul cercului exînscris tangent laturii $[BC]$. Punctul A' este simetricul vârfului A faţă de dreapta BC. Demonstraţi că unghiurile $\angle IOI_a$ şi $\angle IA'I_a$ sunt congruente.

Problema 4. Pe un cerc se scriu numerele de la 1 la 100 într-o anumită ordine. Spunem despre o pereche de numere de pe cerc că este *bună* dacă cele două nu sunt vecine şi dacă pe cel puţin unul din cele două arce de cerc pe care ele le determină se află numai numere mai mici decât fiecare din ele. Cât poate fi numărul total de perechi bune?

Timp de lucru: 4 ore