Olimpiada Naţională de Matematică
Al treilea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori, Bucureşti, 17 mai 2019

Problema 1. Determinaţi toate numerele naturale k pentru care există numerele naturale n şi m, $m \geq 2$, astfel ca $3^k + 5^k = n^m$.

Problema 2. Fie O centrul cercului circumscris unui triunghi ascuţitunghic ABC în care $m(\angle B) < m(\angle C)$. Dreapta AO intersectează latura BC în D. Fie E şi F centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD, respectiv ACD. Pe prelungirile laturilor $[AB]$ şi $[AC]$, dincolo de A, se consideră punctele G, respectiv H astfel încât $AG = AC$ şi $AH = AB$. Demonstraţi că patrulaterul $EFGH$ este dreptunghi dacă şi numai dacă $m(\angle ACB) - m(\angle ABC) = 60°$.

Problema 3. Fie a, b, c, d numere reale satisfăcând condiţiile $|a|, |b|, |c|, |d| > 1$ şi $abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0$. Demonstraţi că

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

Problema 4. Pătrăţelele unitate ale unui dreptunghi $1 \times (2n+1)$ se colorează cu alb sau cu negru. Spunem că un pătrăţel este echilibrat dacă suma dintre numărul pătrăţelelor albe situate la stânga sa şi numărul de pătrăţele negre situate la dreapta sa este n.
Arătaţi că există un număr impar de pătrăţele echilibrate.