Olimpiada Naţională de Matematică
Al doilea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori, Bucureşti, 15 mai 2019

Problema 1. Determinaţi numerele naturale nenule a şi b, cu $(a, b) = 1$, care verifică relaţia $a^2 + b = (a - b)^3$.

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi A o mulţime formată din $8n + 1$ numere naturale nenule, prime cu 6 şi mai mici decât $30n$. Demonstraţi că există $a, b \in A$ astfel încât a divide b.

Problema 3. Un cerc cu centrul în O este tangent interior la două cercuri secante situate în interiorul său. Dacă S şi T sunt punctele de tangenţă, iar M şi N sunt punctele de intersecţie a celor două cercuri, cu N situat mai aproape de dreapta ST decât M, demonstraţi că dreptele OM şi MN sunt perpendiculare dacă şi numai dacă punctele S, N şi T sunt coliniare.

Problema 4. Fie a, b două numere reale pozitive astfel încât $3(a^2 + b^2 - 1) = 4(a + b)$. Găsiţi valoarea minimă a expresiei

$$\frac{16}{a} + \frac{1}{b}.$$

Timp de lucru: 4 ore