Olimpiada Naţională de Matematică
Primul baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori,
Bucureşti, 10 mai 2019

Problema 1. Fie n un număr natural nenul şi $M = \{n^3,\ n^3+1,\ n^3+2,\ \ldots, n^3+n\}$. Fie A şi B două submulţimi nevide, disjuncte, ale lui M. Demonstraţi că dacă suma elementelor mulţimii A divide suma elementelor mulţimii B, atunci cardinalul mulţimii A divide cardinalul mulţimii B.
(Cardinalul unei mulţimi finite este numărul elementelor respectivei mulţimi.)

Soluţie: Fie $A = \{n^3+n_1, n^3+n_2, \ldots, n^3+n_a\}$, $B = \{n^3+m_1, n^3+m_2, \ldots, n^3+m_b\}$

şi $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $(n^3+m_1+n^3+m_2+\ldots+n^3+m_b) = k(n^3+n_1+n^3+n_2+\ldots+n^3+n_a)$. Atunci $n^3(ka-b) = m_1+m_2+\ldots+m_b - k(n_1+n_2+\ldots+n_a)$. Pentru început să demonstrăm că dacă $n > 1$ atunci $k < n+1$ (deci $k \leq n$). Presupunând $k \geq n+1$, am avea $n^3+1+n^3+2+\ldots+n^3+n \geq (n^3+m_1+n^3+m_2+\ldots+n^3+m_b) \geq (n+1)(n^3+n_1+n^3+n_2+\ldots+n^3+n_a) \geq (n+1)n^3$, adică $n^4 + \dfrac{n(n+1)}{2} \geq n^3(n+1)$. Ar rezulta $2n^3+n+1 \geq 2n^3+2n^2$, contradicţie.
Pentru $n = 1$ afirmaţia din enunţ este evidentă, singura posibilitate de a alege mulţimile fiind $A = \{1\}$, $B = \{2\}$.
Aşadar, pentru $n > 1$ avem $k \leq n$ şi atunci $m_1+m_2+\ldots+m_b-k(n_1+n_2+\ldots+n_a) < m_1+m_2+\ldots+m_b < 1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2} < n^3$ şi $m_1+m_2+\ldots+m_b-k(n_1+n_2+\ldots+n_a) \geq -n(n_1+n_2+\ldots+n_a) \geq -n(1+2+\ldots+n) = -\dfrac{n^2(n+1)}{2} > -n^3$. Rezultă aşadar că $-n^3 < n^3(ka-b) < n^3$, deci că $ka-b=0$ ceea ce arată că a divide b.

Problema 2. Dacă x, y, z sunt numere reale astfel încât $x^2+y^2+z^2 = 2$, demonstraţi că $x+y+z \leq xyz+2$.

Soluţia 1:
Avem $2xy \leq x^2+y^2 \leq x^2+y^2+z^2 = 2$, deci $xy \leq 1$ şi analoagele. De asemenea, $(x+y)^2 = x^2+y^2+2 \leq 4$, deci $x+y \leq |x+y| \leq 2$ şi analoagele. Dacă printre numerele x, y, z există cel puţin unul negativ, să zicem z, atunci $x+y \leq 2$ şi $z \leq xyz$ implică prin adunare concluzia. Egalitate avem dacă $x = y = 1$, dar atunci condiţia din enunţ revine la $z = 0$.
Dacă $x, y, z \in [0,1]$, atunci $z(1-xy) \leq 1-xy \leq 2-x-y$ (ultima inegalitate revine la $(1-x)(1-y) \geq 0$). Egalitate, în acest caz, avem dacă $x = y = 1$ şi $z = 0$.
Dacă vreunul dintre x, y, z este mai mare ca 1, atunci acesta este unic (din cauza

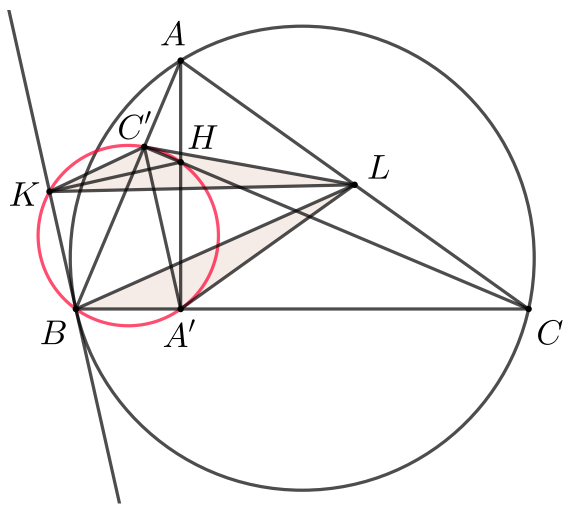
relaţiei din enunţ). Să zicem că $x, y \in [0, 1)$, $z > 1$. Atunci $(1-x)(1-y)(z-1) \geq 0 \Leftrightarrow xyz + 2 \geq xy + yz + zx + 3 - (x+y+z) \geq x+y+z$, ultima inegalitate fiind $2(xy+yz+zx) + 6 = (x+y+z)^2 + 4 \geq 4(x+y+z)$.

Alt mod de a trata cazul $z > 1$. Din inegalitatea dintre media aritmetică şi cea pătratică avem $(x+y)+z \leq \sqrt{2[(x+y)^2+z^2]} = \sqrt{2(2+2xy)} = 2\sqrt{1 \cdot (1+xy)} \leq 1 + (1+xy) = 2 + xy \leq 2 + xyz$.

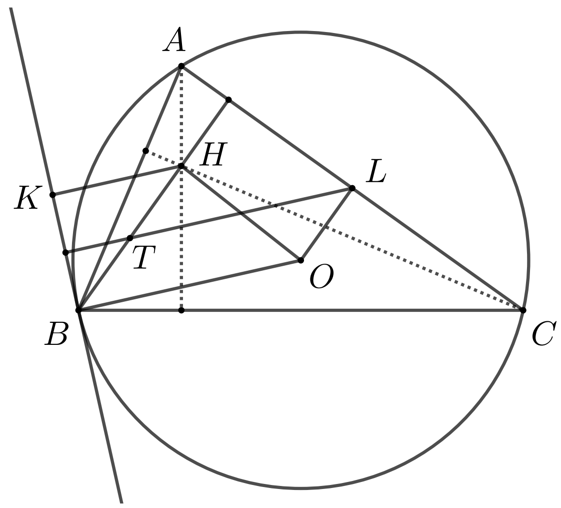
Soluţia 2: Cu inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz avem
$(x+y+z-xyz)^2 = \big((x+y) + z(1-xy)\big)^2 \leq \big((x+y)^2 + z^2\big)\big(1 + (1-xy)^2\big) = (2+2xy)(2-2xy+x^2y^2) = 4 + 2x^2y^2(xy-1) \leq 4$ deoarece avem $x+y \leq 2$ şi $xy \leq 1$.

Problema 3. Dreapta d este tangentă cercului circumscris triunghiului ascuţitunghic scalen ABC în punctul B. Fie K proiecţia ortocentrului, H, al triunghiului ABC pe dreapta d, iar L mijlocul laturii $[AC]$. Demonstraţi că triunghiul BKL este isoscel.

Soluţia 1:
Să presupunem că $AB < BC$, celălalt caz fiind analog. Dacă A' şi C' sunt picioarele înălţimilor din A, respectiv C, atunci punctele A', C', K se află pe cercul de diametru $[AH]$. Şi patrulaterul $ACA'C'$ este inscriptibil (în cercul de diametru $[AC]$), deci $m(\sphericalangle BC'A') = m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle KBA)$, deci $BKC'A'$ este un trapez inscriptibil, deci un trapez isoscel. Rezultă că $C'K = A'B$ şi $m(\sphericalangle KC'A') = m(\sphericalangle BA'C') = m(\sphericalangle A)$.
Pe de altă parte, $[C'L]$ şi $[A'L]$ sunt mediane în triunghiurile dreptunghice ACC', respectiv ACA', deci $C'L = A'L = \frac{BC}{2}$. Atunci $\sphericalangle LC'A' \equiv \sphericalangle LA'C'$, deci $\sphericalangle LC'K \equiv \sphericalangle LA'B$, prin urmare triunghiurile $LC'K$ şi $LA'B$ sunt congruente (LUL), de unde concluzia.



Soluţia 2:
Presupunem că $AB < BC$, celălalt caz fiind analog. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi T mijlocul segmentului $[BH]$. Se ştie că $BTLO$ este paralelogram (avem $LO \parallel BH$, $BH = 2R\cos B$, $LO = R\cos B$, unde R este raza cercului circumscris), deci L se află pe dreapta suport a liniei mijlocii a trapezului $KHOB$, adică pe mediatoarea lui $[KB]$.



Problema 4. În fiecare pătrat unitate al unei table $n \times n$, $n \geq 11$, se scrie câte un număr real astfel încât suma numerelor din orice pătrat 10×10 să fie pozitivă şi suma numerelor din orice pătrat 11×11 să fie negativă. Pentru ce valori ale lui n este posibil acest lucru?

Soluţie:
Pentru $n \leq 19$ este posibil. Scriem 100 în pătratul din mijloc (sau unul din cele 4 pătrate din mijloc dacă n este par) şi -1 în rest. Pătratul în care am scris 100 face parte din orice pătrat 10×10 şi 11×11, deci suma numerelor din orice pătrat 10×10 este 1, iar din orice pătrat 11×11 este -20.
Pentru $n = 20$ nu este posibil. Sunt 11^2 pătrate 10×10 şi 10^2 pătrate 11×11. Dacă facem suma numerelor din fiecare pătrat 10×10 şi apoi suma acestor sume, ar trebui să obţinem un număr pozitiv. Analog, dacă facem suma numerelor din fiecare pătrat 11×11 şi apoi suma acestor sume, ar trebui să obţinem un număr negativ. Dar cele două sume coincid. Etichetând fiecare linie şi fiecare coloană cu i respectiv j după a câta este de la margine (liniile şi coloanele sunt etichetate $1, 2, 3, \ldots, 9, 10, 10, 9, \ldots, 2, 1$) atunci orice număr etichetat (i, j) intră în $i \cdot j$ pătrate 10×10 şi la fel de multe pătrate 1×11, deci cele două sume coincid.
Nici pentru $n > 20$ nu este posibil. Este suficient să ne uităm la un sub-pătrat 20×20 şi să folosim argumentul de mai sus ca să ne convingem.