Olimpiada Naţională de Matematică
Primul baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori,
Bucureşti, 10 mai 2019

Problema 1. Fie n un număr natural nenul şi $M = \{n^3,\ n^3+1,\ n^3+2,\ \ldots, n^3+n\}$. Fie A şi B două submulţimi nevide, disjuncte, ale lui M. Demonstraţi că dacă suma elementelor mulţimii A divide suma elementelor mulţimii B, atunci cardinalul mulţimii A divide cardinalul mulţimii B.
(Cardinalul unei mulţimi finite este numărul elementelor respectivei mulţimi.)

Problema 2. Dacă x, y, z sunt numere reale astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, demonstraţi că $x + y + z \leq xyz + 2$.

Problema 3. Dreapta d este tangentă cercului circumscris triunghiului ascuţitunghic scalen ABC în punctul B. Fie K proiecţia ortocentrului, H, al triunghiului ABC pe dreapta d, iar L mijlocul laturii $[AC]$. Demonstraţi că triunghiul BKL este isoscel.

Problema 4. În fiecare pătrat unitate al unei table $n \times n$, $n \geq 11$, se scrie câte un număr real astfel încât suma numerelor din orice pătrat 10×10 să fie pozitivă şi suma numerelor din orice pătrat 11×11 să fie negativă. Pentru ce valori ale lui n este posibil acest lucru?