Problema săptămânii 141

Fie M mijlocul laturii (BC) a triunghiului ABC şi $D \in (AM$ astfel încât $AD = BM = CM$. Dacă X, Y, Z mijloacele segmentelor (AB), (DM) şi (AC), arătaţi că $XY \perp YZ$.

Thanos Kalogerakis, Romantics of Geometry, 2019

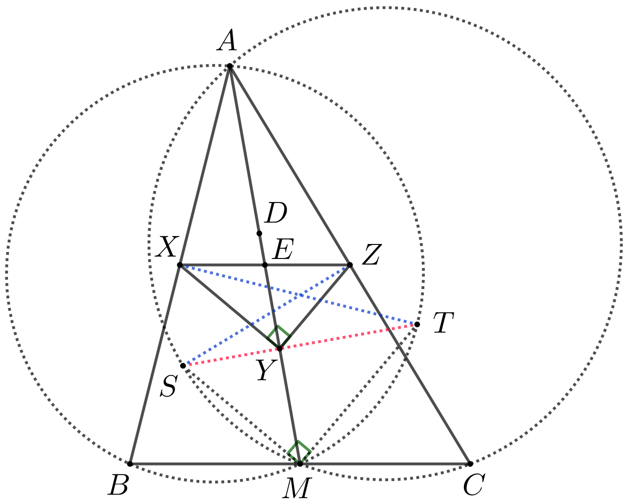
Soluţia 1: Dacă E este mijlocul lui $[AM]$, atunci, dacă $m(\sphericalangle A) \leq 90°$,

$YE = ME - MY = \dfrac{AM}{2} - \dfrac{DM}{2} = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{BM}{2} = XE$ (linie mijlocie).

Dacă $m(\sphericalangle A) > 90°$, semnele „$-$" din calculul de mai sus trebuie înlocuite cu „+".
Evident, X, E, Z sunt coliniare, deci triunghiul XYZ este dreptunghic.

Soluţia 2: Din teorema bisectoarei glisante în triunghiurile AMB şi AMC rezultă că XY şi YZ sunt paralele cu bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BMA$, respectiv $\sphericalangle AMC$. Cum acestea din urmă sunt perpendiculare, rezultă că şi dreptele XY şi YZ sunt perpendiculare.
Pentru o altă aplicaţie asemănătoare a teoremei bisectoarei glisante, a se vedea problema 1 de la clasa a IX-a de la ONM 2019.

Soluţia 3: Deoarece $\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BM}\right)$ şi $\overrightarrow{ZY} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CM}\right)$, avem $\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{ZY} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BM}\right)(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CM}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CM}) = \frac{1}{4}(AB^2+\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}) - BM\cdot CM) = \frac{1}{4}(AD^2+0-AB^2) = 0$, ceea ce arată că $XY \perp YZ$.



Comentarii:

Am ales această problemă pentru configuraţia bogată. O mică recapitulare a unor proprietăţi cunoscute:

- dreapta XY înjumătăţeşte perimetrul triunghiului ABM
- dacă T este intersecţia mediatoarei lui $[AB]$ cu cercul circumscris triunghiului

ABM (care se află şi pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle AMC$), atunci $TY \perp AM$ (teorema coardei rupte a lui Arhimede); analog, $SY \perp AM$, deci S, Y, T sunt coliniare

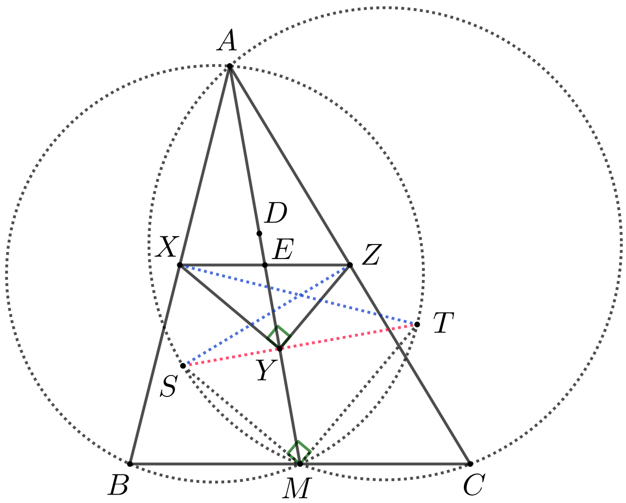
Problem of the week no. 141

Let M be the midpoint of the side (BC) of triangle ABC and consider D on the ray $(AM$ such that $AD = BM = CM$. If X, Y, Z are the midpoints of line segments (AB), (DM) and (AC), prove that $XY \perp YZ$.

Thanos Kalogerakis, Romantics of Geometry, 2019

Solution 1: Let E be the midpoint of $[AM]$; if angle $\sphericalangle A$ is acute, then $YE = ME - MY = \dfrac{AM}{2} - \dfrac{DM}{2} = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{BM}{2} = XE$ (midsegment). If $\sphericalangle A$ is obtuse, the signs "$-$" in the computations above should be changed into "$+$". Clearly, X, E, Z are collinear, hence XYZ is right-angled.

Solution 2: Since $\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BM})$ and $\overrightarrow{ZY} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CM})$, we have $\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{ZY} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BM})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CM}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM}) = \frac{1}{4}(AB^2 + \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}) - BM \cdot CM) = \frac{1}{4}(AD^2 + 0 - AB^2) = 0$, which shows that $XY \perp YZ$.



Comments:

The configuration has many well-known properties. A small recap:

- lines XY and YZ are parallel to the bisectors of the angles $\sphericalangle BMA$ and $\sphericalangle AMC$ respectively - the line XY splits the perimeter of triangle ABM into two equal parts

- if T is the intersection of the perpendicular bisector of $[AB]$ with the circumcircle of triangle ABM (which also lies on the bisector of angle $\sphericalangle AMC$), then $TY \perp AM$ (Broken Chord Theorem of Archimedes, see here); similarly, $SY \perp AM$, hence S, Y, T are collinear