Problema săptămânii 140
Fie $S = \{1, 2, \ldots, 2019\}$. În câte moduri poate fi pariţionată mulţimea S în două submulţimi A şi B astfel încât nici A şi nici B să nu conţină două numere naturale (diferite) a căror sumă să fie o putere a lui 2?
Remarcă. Spunem că A şi B formează o partiţie a lui S dacă A şi B sunt nevide, disjuncte şi reuniunea lor este S.

antrenament Franţa, 2016

Soluţie: Vom demonstra că răspunsul este $2^{11} = 2048$. Mai exact, vom demonstra că putem repartiza arbitrar numerele $1, 2, 4, 8, \ldots, 1024$ (11 numere) în câte una din submulţimile A şi B şi că, odată aceste numere repartizate, există un singur mod de a repartiza numerele rămase. Vom putea atunci conchide că sunt 2^{11} moduri de a împărţi numerele în cele două submulţimi.

Mai întâi demonstrăm printr-o inducţie tare că oricărei repartizări a puterilor lui 2 îi corespunde cel mult o repartizare a numerelor rămase, adică repartizarea fiecăruia dintre numerele rămase este impusă.
Odată poziţiile lui 1 şi 2 stabilite, 3 trebuie să fie în submulţimea care nu îl conţine pe 1 deoarece $1 + 3 = 2^2$.
Să presupunem acum că poziţiile numerelor de la 1 la $k - 1$ au fost deja stabilite. Dacă k este o putere a lui 2, atunci poziţia lui k a fost deja fixată. Dacă nu, atunci k este cuprins între două puteri consecutive ale lui 2: $2^{a-1} < k < 2^a$. Dar atunci $0 < 2^a - k < k$ deci poziţia lui $2^a - k$, în A sau B, a fost deja stabilită. Aşadar, k este în mod necesar în cealaltă submulţime. Prin urmare, odată plasate puterile lui 2, există cel mult un mod de a plasa celelalte numere.

Rămâne să demonstrăm că, pentru orice plasare a puterilor lui 2, există într-adevăr o partiţie cu proprietatea dorită. Demonstraţia de mai sus furnizează un algoritm care permite reparizarea tuturor numerelor care nu sunt puteri ale lui 2. Trebuie să arătăm că rezultatul acestei repartizări este o partiţie care are proprietăţile dorite. Algoritmul plasează orice număr k cuprins între două puteri consecutive ale lui 2, 2^{a-1} şi 2^a, într-una din submulţimi astfel încât acesta, adunat cu orice număr mai mic aflat în aceeaşi submulţime cu el să nu dea 2^a. Să arătăm că rezultatul adunării lui k cu un alt element al mulţimii în care se află k nu poate fi nici altă putere a lui 2 (2^a am văzut că nu poate fi). Dacă $k + m = 2^b$, este evident că $b > a$ (deoarece $k > 2^{a-1}$) şi atunci, cum $2^b > m = 2^b - k > 2^b - 2^a \geq 2^b - 2^{b-1} = 2^{b-1}$, se contrazice alegerea mulţimii în care este plasat m.
Aşadar, pentru orice plasare a puterilor lui 2, există într-adevăr câte o (unică) partiţie cu proprietatea dorită.
Deoarece 1 şi 3 sunt în submulţimi diferite, este evident că orice împărţire care are proprietatea din enunţ conduce la două submulţimi nevide A şi B.

Problem of the week no. 140
In how many ways can one partition the set $S = \{1, 2, \ldots, 2019\}$ into two subsets, A and B, such that neither A nor B contains two (distinct) positive integers whose sum is a power of 2?
Remark. We say that A and B form a partition of S if A and B are non-empty, disjoint, and their union is S.

French training, 2016

Solution: We prove that the answer is $2^{11} = 2048$. More precisely, we prove that we can distribute the numbers $1, 2, 4, 8, \ldots, 1024$ (11 numbers) randomly in one of the subsets A and B and that, once these numbers have been placed into one set or the other, there is a unique way of distributing the remaining numbers. It will follow that there are 2^{11} ways of distributing the numbers between the two subsets.

First, we prove by a strong induction that to each distribution of the powers of 2, there is at most one way of distributing the remaining numbers, i.e. we prove that the set to which each of the remaining numbers belongs is imposed by the choices made for the powers of 2.
Once the positions of 1 and 2 established, 3 must belong to the subset that does not contain 1 because $1 + 3 = 2^2$.
Assume that the subset of each of the numbers from 1 to $k - 1$ has already been established. If k is a power of 2, then the position of k has already been fixed. If not, then k is between two consecutive powers of 2: $2^{a-1} < k < 2^a$. But then $0 < 2^a - k < k$, which means that the position of $2^a - k$, in either A or B, has already been established. Therefore k must belong to the other subset. In conclusion, once the powers of 2 have been placed in one of the subsets, there is at most one way to place the remaining numbers.

Next we prove that for each choice made for the powers of 2, there is indeed one convenient way of distributing the remaining numbers. The proof above provides an algorithm of placing the remaining numbers. We must prove that the result of this algorithm is always a convenient partition. The algorithm places every number k situated between two consecutive powers of 2, 2^{a-1} and 2^a, in one of the subsets such that the sum of k with any smaller element of the same subset with k is different from 2^a. Let us prove that the sum of k with any other element of the same subset with k can not be any other power of 2 either (we have seen the sum could't be 2^a). If $k + m = 2^b$ is such a sum, then clearly $b > a$ (because $k > 2^{a-1}$) and then, since $2^b > m = 2^b - k > 2^b - 2^a \geq 2^b - 2^{b-1} = 2^{b-1}$, we obtain a contradiction with the choice of the subset of m.
In conclusion, for any positioning of the powers of 2, there is indeed one convenient partition.
Obviously, 1 and 3 always belong to different subsets, so subsets A and B are non-empty.