Problema săptămânii 139

Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care $(n!)^n$ divide $(n^2-1)!$.

adaptare după *AMC 12 Contest*, 2019

Soluţia 1:

Vom demonstra că numerele căutate sunt toate, cu excepţia lui 4 şi a numerelor prime.

Evident, $n=1$ are proprietatea din enunţ. În continuare von considera $n>1$.

Pentru început vom demonstra că $\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ este număr natural oricare ar fi n.

O variantă ar fi să observăm că acest număr reprezintă tocmai numărul de moduri în care putem împărţi n^2 persoane în n grupuri (disjuncte) de câte n.

(Dacă aranjăm persoanele într-un şir şi spunem că primele n formează primul grup, următoarele n formează al doilea grup ş.a.m.d., atunci sunt $(n^2)!$ moduri de a permuta persoanele. Dar acelaşi rezultat îl obţinem oricum am permuta persoanele din fiecare grup, deci acest rezultat trebuie împărţit cu $(n!)^n$. Apoi, şi grupurile pot fi permutate, deci rezultatul mai trebuie împărţit o dată cu $n!$.)

Prin urmare, pentru ca $(n!)^n$ să dividă $(n^2-1)!$, este suficient ca n^2 să dividă $n!$. Se ştie că acest lucru se întâmplă pentru orice număr compus diferit de 4. Vom demonstra în continuare acest lucru.

Vrem să determinăm numerele n cu proprietatea că n divide $(n-1)!$. Evident, nici 4, nici numerele prime nu satisfac această proprietate. Fie acum $n>4$ un număr compus. Dacă $n=ab$, cu $a,b>1$, $a\neq b$, atunci a şi b se află printre factorii lui $(n-1)!$, deci n divide $(n-1)^2$. Singurele numere compuse care nu au o astfel de scriere sunt cele de forma p^2 cu p prim. Exponentul lui p în descompunerea în factori primi a lui $(p^2-1)!$ este $p-1$, deci $(p^2-1)!$ este divizibil cu p^2 dacă şi numai dacă $p-1\geq 2$, adică $p\geq 3$. (De aici apare excepţia $n=4=p^2$ cu $p=2$.)

Rămâne de văzut dacă numerele prime şi numărul 4 verifică sau nu condiţia din enunţ. Pentru 4 se verifică prin calcul că proprietatea nu are loc (problema e la exponentul lui 2). Pentru n prim, se vede uşor că exact $n-1$ dintre factorii de la numărător sunt divizibili cu n (şi niciunul dintre aceştia nu este divizibil cu n^2), în vreme ce la numitor sunt n factori divizibili cu n, deci numerele prime nu satisfac condiţia din enunţ.

Vă recomand un filmuleţ în care *Richard Rusczyk* (AoPS) prezintă rezolvarea problemei de la AMC 12: youtube.

Soluţia 2: (*David-Andrei Anghel*)

Vom demonstra că numerele care verifică proprietatea sunt numerele naturale nenule care nu sunt egale cu 4 şi nu sunt prime.

Pentru orice număr prim p şi orice număr natural nenul q notăm cu $\ell_p(q)$ exponentul lui p din descompunerea în factori primi a lui $q!$.

Conform formulei lui *Legendre*, $\ell_p(q) = \left[\dfrac{q}{p}\right] + \left[\dfrac{q}{p^2}\right] + \ldots = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}^*}\left[\dfrac{q}{p^j}\right]$.

Arătăm mai întâi că pentru $n = 4$ şi pentru $n = p$, p număr prim $(n!)^n \nmid (n^2-1)!$.
Dacă $n = 4$, atunci $n \cdot \ell_2(n) = 4 \cdot 3 = 12 > 11 = \ell_2(n^2-1)$, deci $(n!)^n \nmid (n^2-1)!$.
Dacă n este număr prim, atunci $n \cdot \ell_n(n) = n \cdot 1 = n > n - 1 = \ell_n(n^2-1)$, deci $(n!)^n \nmid (n^2-1)!$.
Arătăm acum că dacă $n \neq 4$ nu este prim, atunci $(n!)^n \mid (n^2-1)!$.
Fie p un număr prim oarecare. Trebuie să demonstrăm că $n \cdot \ell_p(n) \leq \ell_p(n^2-1)$.
Fie $n = p^d \cdot k$, unde $k, d \in \mathbb{N}$, $(k,p) = 1$. Atunci $n \cdot \ell_p(n) \leq \ell_p(n^2-1) \Leftrightarrow n \cdot \ell_p(n) \leq \ell_p(n^2) - 2d \Leftrightarrow 2d + p^d \cdot k \cdot \sum\limits_{j\in\mathbb{N}^*}\left[\dfrac{p^d \cdot k}{p^j}\right] \leq \sum\limits_{j\in\mathbb{N}^*}\left[\dfrac{p^{2d}\cdot k^2}{p^j}\right]$.

Dar $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}^*}\left[\dfrac{p^{2d}\cdot k^2}{p^j}\right] = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}^*}\left[p^d \cdot k \cdot \dfrac{p^d\cdot k}{p^j}\right] = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}^*}\left[p^d\cdot k\cdot\left[\dfrac{p^d\cdot k}{p^j}\right] + p^d \cdot k \cdot \left\{\dfrac{p^d\cdot k}{p^j}\right\}\right] = p^d \cdot k \sum\limits_{j\in\mathbb{N}^*}\left[\dfrac{p^d\cdot k}{p^j}\right] + \sum\limits_{j\in\mathbb{N}^*}\left[p^d\cdot k\cdot\left\{\dfrac{p^d\cdot k}{p^j}\right\}\right]$.

Inegalitatea de demonstrat revine aşadar la $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}^*}\left[p^d\cdot k\cdot\left\{\dfrac{p^d\cdot k}{p^j}\right\}\right] \geq 2d$.

Este suficient să demonstrăm că $\sum\limits_{j=d+1}^{2d}\left[p^d\cdot k\cdot\left\{\dfrac{p^d\cdot k}{p^j}\right\}\right] \geq 2d$, adică

$$\sum_{i=1}^{d}\left[p^d\cdot k\cdot\left\{\frac{k}{p^i}\right\}\right] \geq 2d.$$

Să observăm că dacă $x, y \in \mathbb{N}^*$ şi x nu divide y, atunci $\left\{\dfrac{y}{x}\right\} \geq \dfrac{1}{x}$.

Într-adevăr, dacă $y = cx + r$, cu $0 < r < x$, atunci $\left\{\dfrac{y}{x}\right\} = \dfrac{r}{x} \geq \dfrac{1}{x}$.

Folosind această observaţie, avem: $\sum\limits_{i=1}^{d}\left[p^d\cdot k\cdot\left\{\dfrac{k}{p^i}\right\}\right] \geq \sum\limits_{i=1}^{d}\left[p^d\cdot k\cdot\dfrac{1}{p^i}\right] = \sum\limits_{s=0}^{d-1}\left[p^s\cdot k\right] = \sum\limits_{s=0}^{d-1} p^s \cdot k = k(1 + p + p^2 + \ldots + p^{d-1})$.

Arătăm că $k(1 + p + p^2 + \ldots + p^{d-1}) \geq 2d$.
Dacă $d = 0$, inegalitatea este clar adevărată.
Dacă $d = 1$, trebuie să avem $k \geq 2$ (altfel n este prim) şi inegalitatea este adevărată.
Dacă $d = 2$, vrem să arătăm relaţia $k(1 + p) \geq 4$.
Dacă $p = 2$ atunci $k \geq 2$ (altminteri $n = 4$) şi inegalitatea are loc, iar dacă $p \geq 3$ atunci, din nou, inegalitatea este adevărată.
Dacă $d \geq 3$, atunci $k(1+p+p^2+\ldots+p^{d-1}) \geq 1+2+2^2+\ldots+2^{d-1} = 2^d - 1 \geq 2d$, ultima inegalitate demonstrându-se uşor prin inducţie.
(Alternativ, din inegalitatea mediilor, $1+p+p^2+\ldots+p^{d-1} \geq d\sqrt{p^{d-1}} \geq pd \geq 2d$.)

Problem of the week no. 139
Determine all positive integers n such that $(n!)^n$ divides $(n^2-1)!$.

based on a problem from the *AMC 12 Contest*, 2019

Solution 1:
We prove that the numbers that satisfy the condition above are all numbers with the exception of 4 and of all primes.

Clearly, $n = 1$ satisfies the property. In what follows, we consider $n > 1$.
First, we prove that $\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ isan integer for all n.
This represents exactly the number of ways to distribute n^2 people into n teams of n.
(If we align these n^2 people and say that the first n of them form the first team, the following n form the second team and so on, then there are $(n^2)!$ ways of permuting the people. But we obtain the same teams whenever we permute the people within each of the teams, so we need to divide this result by $(n!)^n$. Finally, the teams can also be permuted, therefore we must divide the result once more by $n!$.)

Thus, for $(n!)^n$ to divide $(n^2-1)!$, it is sufficient to have n^2 divide $n!$. It is knows that this happens whenever n is a composite number other than 4. We prove this. We want to determine those positive integers n that divide $(n-1)!$. Clearly, neither $n = 4$, nor the prime numbers satisfy this property. Consider now $n > 4$ a composite number. If $n = ab$, with $a, b > 1$, $a \neq b$, then a and b are among the factors of $(n-1)!$, hence n divides $(n-1)^2$. The only composite numbers that cannot be written like that are p^2 with p prime. The exponent of p in the prime factorization of $(p^2-1)!$ is $p-1$, which means that $(p^2-1)!$ is a multiple of p^2 if and only if $p-1 \geq 2$, i.e. if $p \geq 3$. (This is where the exception $n = 4 = p^2$ with $p = 2$ comes from.)

It remains to establish whether the prime numbers and the number 4 do satisfy the given condition. For $n = 4$ it is an easy check that shows that the property does not hold (the problem is with the exponent of 2). For n prime, it is easy to see that exactly $n-1$ of the factors of the numerator are multiples of n (and none of them is a multiple of n^2), while at the denominator there are n factors divisible by n, which shows that the prime numbers do not satisfy the property from the statement.

For the solution of the AMC 12 problem, see here.
See also the video of Art of Problem Solving's Richard Rusczyk solving the AMC 12 problem on youtube.

Solution 2: (*David-Andrei Anghel*)
We prove that the numbers that satisfy the condition above are all numbers with

the exception of 4 and of all primes.

For any prime p and any positive integer q we denote by $\ell_p(q)$ the exponent of p in the prime factorization of $q!$.

According to *Legendre*'s formula, $\ell_p(q) = \left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{q}{p^2}\right] + \ldots = \sum_{j\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{q}{p^j}\right]$.

First we prove that if $n = 4$ and $n = p$, p prime, then $(n!)^n \nmid (n^2-1)!$.

If $n = 4$, then $n\cdot\ell_2(n) = 4\cdot 3 = 12 > 11 = \ell_2(n^2-1)$, hence $(n!)^n \nmid (n^2-1)!$.

If n is a prime, then $n\cdot\ell_n(n) = n\cdot 1 = n > n-1 = \ell_n(n^2-1)$, hence $(n!)^n \nmid (n^2-1)!$.

Next we prove that if $n \neq 4$ is not a prime, then $(n!)^n \mid (n^2-1)!$.

Let p be an arbitrary prime number. We need to prove that $n\cdot\ell_p(n) \leq \ell_p(n^2-1)$.

Let $n = p^d\cdot k$, where $k, d \in \mathbb{N}$, $(k,p) = 1$. Then $n\cdot\ell_p(n) \leq \ell_p(n^2-1) \Leftrightarrow n\cdot\ell_p(n) \leq \ell_p(n^2) - 2d \Leftrightarrow 2d + p^d\cdot k\cdot\sum_{j\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{p^d\cdot k}{p^j}\right] \leq \sum_{j\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{p^{2d}\cdot k^2}{p^j}\right]$.

But $\sum_{j\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{p^{2d}\cdot k^2}{p^j}\right] = \sum_{j\in\mathbb{N}^*}\left[p^d\cdot k\cdot\frac{p^d\cdot k}{p^j}\right] = \sum_{j\in\mathbb{N}^*}\left[p^d\cdot k\cdot\left[\frac{p^d\cdot k}{p^j}\right] + p^d\cdot k\cdot\left\{\frac{p^d\cdot k}{p^j}\right\}\right] = p^d\cdot k\sum_{j\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{p^d\cdot k}{p^j}\right] + \sum_{j\in\mathbb{N}^*}\left[p^d\cdot k\cdot\left\{\frac{p^d\cdot k}{p^j}\right\}\right]$.

The inequality we want to prove reduces to $\sum_{j\in\mathbb{N}^*}\left[p^d\cdot k\cdot\left\{\frac{p^d\cdot k}{p^j}\right\}\right] \geq 2d$.

It is sufficient to prove that $\sum_{j=d+1}^{2d}\left[p^d\cdot k\cdot\left\{\frac{p^d\cdot k}{p^j}\right\}\right] \geq 2d$, i.e. $\sum_{i=1}^{d}\left[p^d\cdot k\cdot\left\{\frac{k}{p^i}\right\}\right] \geq 2d$.

Remark: if $x, y \in \mathbb{N}^*$ and x does not divide y, then $\left\{\frac{y}{x}\right\} \geq \frac{1}{x}$.

Indeed, if $y = cx + r$, with $0 < r < x$, then $\left\{\frac{y}{x}\right\} = \frac{r}{x} \geq \frac{1}{x}$.

Using this remark, we get: $\sum_{i=1}^{d}\left[p^d\cdot k\cdot\left\{\frac{k}{p^i}\right\}\right] \geq \sum_{i=1}^{d}\left[p^d\cdot k\cdot\frac{1}{p^i}\right] = \sum_{s=0}^{d-1}\left[p^s\cdot k\right] = \sum_{s=0}^{d-1}p^s\cdot k = k(1+p+p^2+\ldots+p^{d-1})$.

We prove that $k(1+p+p^2+\ldots+p^{d-1}) \geq 2d$.

If $d = 0$, the inequality is clearly true.

If $d = 1$, we must have $k \geq 2$ (otherwise n is a prime) and the inequality is again true.

If $d = 2$, we want to show that $k(1+p) \geq 4$.

If $p = 2$ then $k \geq 2$ (otherwise $n = 4$) and the inequality holds, while if $p \geq 3$ then, again, the inequality is clearly true.

If $d \geq 3$, then $k(1+p+p^2+\ldots+p^{d-1}) \geq 1+2+2^2+\ldots+2^{d-1} = 2^d - 1 \geq 2d$, the last inequality following by an easy induction.

(Alternatively, from AM-GM, $1+p+p^2+\ldots+p^{d-1} \geq d\sqrt{p^{d-1}} \geq pd \geq 2d$.)