Problema săptămânii 138
Determinaţi numerele reale a, b, c, d pentru care

$$a + bcd = b + cda = c + dab = d + abc = 10.$$

Concursul „Arany Dániel", Ungaria, 2016

Soluţie:
Din $a + bcd = b + cda$ rezultă $(a - b)(1 - cd) = 0$. Analog se deduc cinci relaţii similare. Distingem mai multe cazuri.
Cazul I. $a = b = c = d$. În acest caz, condiţia din enunţ revine la $a^3 + a = 10$, adică la $a = 2$. (Dacă $a > 2$, atunci $a^3 > 8$, deci $a^3 + a > 8 + 2 = 10$, iar dacă $a < 2$ atunci $a^3 + a < 2^3 + 2 = 10$. Sau, alternativ, putem descompune: $a^3 + a - 10 = (a - 2)(a^2 + 2a + 5)$; paranteza a doua este $(a + 1)^2 + 4 > 0$ nu se anulează pentru niciun număr real.)
Cazul II. Exact trei dintre numerele a, b, c, d sunt egale, de exemplu $a = b = c \neq d$. În acest caz relaţia $(a - d)(1 - bc) = 0$ implică $bc = 1$, adică $a = b = c = 1$ sau $a = b = c = -1$. În prima situaţie relaţiile din enunţ conduc la $d = 9$, iar în situaţia a doua ele conduc la $d = 11$. Obţinem aşadar soluţiile în care trei dintre numere sunt egale cu 1 şi cel de-al patrulea cu 9 şi soluţiile în care trei dintre numere sunt egale cu -1 iar cel de-al patrulea cu 11.
Cazul III. Exact două dintre numerele a, b, c, d sunt egale, de exemplu $a \neq b = c \neq d$. Din $(a - b)(cd - 1) = 0$ şi $(b - d)(ac - 1) = 0$ rezultă că $ac = cd = 1$, deci $c \neq 0$ şi $a = d$. Atunci condiţia din enunţ devine $a + ab^2 = b + ba^2 = 10$. Avem şi $(a - b)(ab - 1) = 0$, deci $ab = 1$. Înlocuind în $a + ab^2 = b + ba^2 = 10$ obţinem $a + b = 10$, deci $b = 10 - a$. Atunci $a(10 - a) = 1$ revine la $a^2 - 10a + 1 = 0$, deci la $(a - 5)^2 = 24$. Rezultă că $a = 5 \pm 2\sqrt{6}$, deci $b = 5 \mp 2\sqrt{6}$. Aşadar, în acest caz mai obţinem şase soluţii în care două dintre numere sunt $5 + 2\sqrt{6}$, iar celelalte două $5 - 2\sqrt{6}$.
Cazul IV. Dacă numerele a, b, c, d sunt diferite două câte două, atunci, ca mai sus, rezultă $(a - b)(cd - 1) = 0$ şi $(b - d)(ac - 1) = 0$, de unde $ac = cd = 1$, deci $a = d$, contradicţie. Aşadar, acest caz nu este posibil.

Problem of the week no. 138
Determine the real numbers a, b, c, d that satisfy

$$a + bcd = b + cda = c + dab = d + abc = 10.$$

"Arany Dániel" Contest, 2016

Solution:
From $a+bcd = b+cda$ follows $(a-b)(1-cd) = 0$. We can obtain 5 more conditions, similar to the previous one. We treat the following cases.
Case I. $a = b = c = d$. In this case, the condition in the statement reduces to $a^3 + a = 10$, i.e. to $a = 2$. (If $a > 2$, then $a^3 > 8$, hence $a^3 + a > 8 + 2 = 10$, while $a < 2$ leads to $a^3 + a < 2^3 + 2 = 10$.)

Case II. Exactly three of the numbers a, b, c, d are equal, say $a = b = c \neq d$. In this case, the relation $(a - d)(1 - bc) = 0$ gives $bc = 1$, i.e. we must have either $a = b = c = 1$ or $a = b = c = -1$. In first situation, the equations in the statement lead to $d = 9$, while in the second situation they lead to $d = 11$. We thus obtain four solutions in which three of the numbers are equal to 1, and the fourth one is equal to 9, and four more solutions in which three of the numbers are equal to -1 while the forth one is equal to 11.

Case III. Exactly two of the numbers a, b, c, d are equal, say $a \neq b = c \neq d$. From $(a - b)(cd - 1) = 0$ and $(b - d)(ac - 1) = 0$ we obtain $ac = cd = 1$, which means $c \neq 0$ and $a = d$. We also have $(a - b)(ab - 1) = 0$, i.e. $ab = 1$. The equations in the statement thus become $a + b = 10$. Plugging $b = 10 - a$ into $ab = 1$ yields $a(10 - a) = 1$, i.e. $a^2 - 10a + 1 = 0$, and finally $(a - 5)^2 = 24$. We get $a = 5 \pm 2\sqrt{6}$, then $b = 5 \mp 2\sqrt{6}$. In conclusion, in this case we obtain 6 more solutions in which two of the numbers are equal to $5 + 2\sqrt{6}$, while the other two are equal to $5 - 2\sqrt{6}$.

Case IV. If a, b, c, d are pairwise distinct, then, as above, it follows that $(a-b)(cd-1) = 0$ and $(b - d)(ac - 1) = 0$, hence $ac = cd = 1$, and $a = d$, a contradiction. We conclude that this case is not possible.