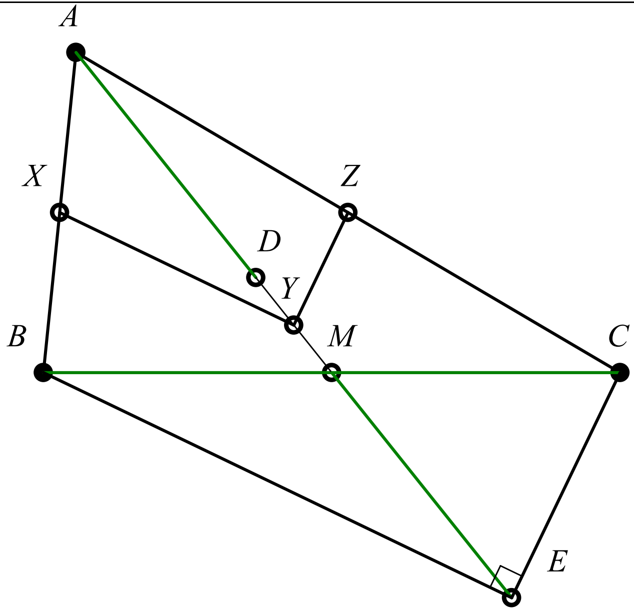
Problema Săptămânii 141([1]):

Fie M – mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC şi $D \in [AM$, astfel încât să avem: $[AD] \equiv [BM] \equiv [CM]$. Notăm cu X, Y şi Z – mijloacele segmentelor $[AB], [DM]$ şi respectiv $[AC]$. Arătaţi că: $XY \perp YZ$.



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): Notând cu $E = S_Y(A)$, în cazul $m\left(\widehat{BAC}\right) > 90^0 \Leftrightarrow |AM| > |AD|$ (v.Fig.), avem:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} E = S_Y(A) \Leftrightarrow [YA] \equiv [YE]\ (1) \\ [YD] \equiv [YM] \end{array}\right\} \Rightarrow |AD| = |YA| - |YD| = |YE| - |YM| = |ME| \Rightarrow [AD] \equiv [ME] \\ [AD] \equiv [BM] \equiv [CM] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [ME] \equiv [BM] \equiv [CM] \Leftrightarrow BE \perp CE. \quad (2)$$

Pe de altă parte, din:

$$\left.\begin{array}{r} [XA] \equiv [XB] \\ [YA] \equiv [YE]\ (1) \end{array}\right\} \Rightarrow YY \parallel BE; \quad (3) \quad \text{şi} \quad \left.\begin{array}{r} [ZA] \equiv [ZC] \\ [YA] \equiv [YE]\ (1) \end{array}\right\} \Rightarrow ZY \parallel CE. \quad (4)$$

În fine, din relaţiile (2), (3) şi (4), rezultă că: $\boxed{XY \perp YZ}$.■

OBSERVAŢIE:

În cazul $m\left(\widehat{BAC}\right) < 90^0 \Leftrightarrow |AM| < |AD| \Leftrightarrow M \in (AD)$ şi atunci singura faţă de raţionamentul anterior, constă în faptul că, în acest caz: $|AD| = |YA| + |YD| = |YE| + |YM| = |ME| \Rightarrow [AD] \equiv [ME]$.

---

[1]). Poate era bine ca prin enunţul problemei să se elimine cazul particular: $m\left(\widehat{BAC}\right) = 90^0$, căci în acest caz, punctele D, M şi Y – coincid şi concluzia problemei este evidentă, întrucât patrulaterul $AXYZ = AXMZ$ – este un dreptunghi!